Doi: 10.34120/0085-036-141-017

الممارسات التدريسية اللازمة لبناء المعرفة الرياضيَّة لدى تلاميذ المرحلة الابتدائيَّة في ضوء التجارب الدوليَّة (سنغافورة واليابان)

د. سعاد مساعد الأحمدي
كلية التربية – جامعة الإمام محمد بن سعود الإسلامية
المملكة العربية السعودية

الملخص

هدفت الدراسة إلى تحديد الممارسات التدريسية اللازمة لبناء المعرفة الرياضية لدى طلبة المرحلة الابتدائية في ضوء التجارب الدولية (سنغافورة واليابان)، ولتحقيق هدف الدراسة تمَّ استخدام المنهج النوعي ذي التصميم الحقلي على عينة الدراسة المكوَّنة مِن 6 معلمين مِن معلمي الرياضيات بالمرحلة الابتدائية لكلٍّ دولة. وأظهرت نتائجُ الملاحظات الصفية المفتوحة والمقابلات غير المقننة مع عينة الدراسة أنَّ النمط التدريسيَّ المستخدم في اليابان هو نهج حلّ المشكلة وفق مراحله: طرح مشكلة حياتية، وتطوير الحل، والتقدم مِن خلال المناقشة، والتلخيص؛ حيث يتم تلخيص المعارف والتأمُّل في الممارسة. في حين كان النمطُ التدريسي المستخدم لدى عينة الدراسة في سنغافورة هو التدريس المباشر. كما أظهرت النتائجُ تركيز الدولتين في ممارساتهما التدريسية على بناءِ المعرفة المفاهيمية أولاً، ومِن ثم المعرفة الإجرائية؛ يساندهما طبيعة المحتوى الرياضي الذي يَعرضُ مفاهيم بعمقٍ أقل وتركيزٍ أكثر، واهتمام معلميها اهتمامًا شديدًا باستخدام التمثيلات؛ لبناء المفاهيم الرياضية، والتدرُّج العميق لتشكيلها في أذهان طلبتهم؛ حيث بدأ العرض بالتدرُّج مِن التمثيل المحسوس إلى التمثيل التصويري، وصولا إلى التمثيل المجرد للمفهوم وتعبيراته الرمزية؛ لجعل الرياضيات ذات معنى لطلبتهم.

الكلمات المفتاحية: الممارسات التدريسية، المعرفة الرياضية، التجارب الدولية.

مقدمة

يعدُّ تعليم وتعلُّم الرياضيات مِن أهمِّ المتطلبات الأساسية للتنمية الاقتصادية، ومحو الأميَّة الثقافية؛ لذا أولته جميعُ الدول المتقدمة جُلَّ عنايتها، وقدَّمت العديد مِن الأبحاث والبرامج والمبادرات التي تُعنى بتطويره؛ لتحقيق الأهداف المنشودة، ويتطلَّب تعليم الرياضيات الجيد السعي نحو بناءٍ معرفيٍّ رياضيٍّ قوي؛ حيث يرى (Hiebert & Grouws, 2007) أنَّ إتقان الرياضيات يتطلب الوعي بالمعرفة الرياضية بشقيها: المفاهيمي والإجرائي. وقد ناقش العديدُ مِن التربويين تأثيرَ تركيز التدريس على أحدهما أو كلاهما على الفهم الرياضي والتحصيل؛ حيث أكَّدت الدراسات أنَّ عرضَ المعلمين للرياضيات باعتبارها مجموعةً مِن القواعد والإجراءات والحقائق، وفصل المعرفة الإجرائية عما تعنيه عملياتها أو نتائجها فصلًا غير منظَّم جعل المتعلمين يعانون مِن تعلمها، و حدّ مِن فرص استكشاف المشكلات والإبداع في إجراءات حلها، الأمر الذي انعكس على نتائجِ تحصيلهم؛ (Baroody, Feil & Johnson, 2007; Hiebert & Grouws, 2007; Burghes & Robinson, 2009) وتعدُّ تجارب الدول التي تصدَّرت نتائجُ طلابها المراكزَ المتقدمة الأولى في الاختبارات الدولية، كـ: اتجاهات الدراسات الدولية للرياضيات والعلوم (TIMSS)، والدراسة الدولية لقياس مدى تقدُّم القراءة في العالم (PIRLS) وكذلك البرنامج الدولي؛ لتقويم الطلاب (PISA)؛ مثل: سنغافورة واليابان مصدرًا غنيا يمكن الاستفادة منه في تطوير عمليات التعلُّم والتعليم، وهذا ما جعل العديد مِن الدول تنظرُ إلى التعليم في تلك الدول بوصفه نموذجًا للنجاح. وقد وجهت العديدُ مِن الدراسات لبحث طبيعة تلك الممارسات ومقارنتها بغيرها، مِن خلال تحليل الممارسات الصفية تحليلًا مباشرًا، أو مِن خلال تحليل الممارسات المعروضة في تسجيلات الفيديو لاختبارات التوجهات الدولية (TIMSS)، مثل: (Stigler & Hiebert, 1999; Chang, Kaur, Koay & Lee, 2000; Mullis, Martin, Foy Hooper, 2016). وأكدت دراسة (Hiebert & Morris, 2012) على أن استخدام تحليل الدرس المقارن يساعد في التركيز أكثر على التدريس ومعرفة ما يجرى فعليا داخل الصف.

يتضح مما سبق الاهتمام المتزايد باستخدام أساليب البحث المتنوعة لوصفِ الممارسات الصفية وتحليلها بما يساعد في التركيز أكثر على جمع المزيد

مِن الأدلة وانتقاء الممارسات التدريسية الفاعلة في بناء المعرفة الرياضية التي تسهم في الرَّفع مِن جودة التعليم.

مشكلة الدراسة وأسئلتها

يعدُّ موضوع بناء وتطوير المعرفة الرياضية بشقيها: المفاهيمي والإجرائي أحدَ أهمِّ التحديات التي يواجهها تعليم الرياضيات محليا وعالميا؛ حيث أظهرت نتائجُ اختبارات التقييم الدولي (PISA, 2012) أنَّ 32% مِن جميع الطلاب المشاركين، البالغ عددهم قرابة نصف مليون طالبٍ مِن 65 دولةً لم يتمكنوا مِن "استخلاص المعلومات ذات العلاقة، ولم يتمكنوا مِن الاستخدام الصحيح للخوارزميات الأساسية، أو الصيغ، أو الإجراءات لحلِّ المشكلات (OECD, 2015)، كما يظهر هذا الأمر وبشدة على المستوى المحلي؛ حيث أظهرت نتائجُ الاختبارات الدولية مِن خلال عدة دورات (TIMSS, 2003, 2007, 2011, 2015) تدني مستوى المعرفة الرياضية لدى الطلاب في المملكة العربية السعودية؛ كما أكَّدت نتائجُ الاختبارات الوطنية لعام 1435/1436هـ التي أعلنتها هيئةُ التقويم والتعليم (2016) أنَّ 41% مِن الطلبة لم يحققوا الحد الأدنى مِن مستويات الأداء المتوقع منهم في مادة الرياضيات. بينما تبيَّن أَن الدول التي احتلت المراكز المتقدمة في الاختبارات الدولية، مثل: اليابان وسنغافورة قد أظهرت اهتماما شديداً بالمعرفة الرياضية، وسبل تنميتها؛ حيث حقَّق طلابها ولعدة أعوام نتائجَ متقدمة في الاختبارات الدولية؛ لذا ارتأت الباحثة تسليطَ الضوء على الممارسات التدريسية اللازمة لبناء المعرفة الرياضية في محاولةٍ علميةٍ؛ لتعميق الفهم ببعض أبعاد هذه المشكلة.

وعليه، فقد تحدد السؤال الرئيس للدراسة الحالية على النحو الآتي:

ما الممارسات التدريسية اللازمة لبناء المعرفة الرياضية لدى طلبة المرحلة الابتدائية في ضوء التجارب الدولية (اليابان وسنغافورة)؟

وتتناول تلك الممارسات محاور: النمط التدريسي، الممارسات التطبيقية من قبل المعلمين والمتعلمين.

هدف الدراسة: تهدف الدراسة إلى التعرُّف إلى التوجهات الحديثة للممارسات التدريسية اللازمة لبناء المعرفة الرياضية بشقيها: المفاهيمي والإجرائي، في اتجاه إيجابي نحو تحسين الممارسات التدريسية لدى معلمي ومعلمات الرياضيات في المملكة العربية السعودية.

أهمية الدراسة: تستمدُّ هذه الدراسة أهميتها مِن أهمية المرحلة الدراسية؛ حيث تعدُّ المرحلة الابتدائية المرحلة التأسيسية في بناء المعارف والمهارات للمراحل التي تليها. كما تُعد خطوة هامة في التحول إلى التعلم نشاطا مستداما؛ في مجال الرياضيات. كما تُعد الدراسة الحالية في موقع الريادة بالنسبة للثقافة العربية.

منهج الدراسة: اعتمدتْ هذه الدراسة المنهج النوعي ذي التصميم الحقلي.

مجتمع الدراسة وعينته: تحدَّد مجتمعُ الدراسة بمعلمي رياضيات المرحلة الابتدائية بدولتي سنغافورة واليابان. وتمثَّلت عينةُ الدراسة في اليابان بستةٍ مِن معلمي الرياضيات في "المدرسة الابتدائية المُلحقة بجامعة فوكوي، University of Fukui Attached Elementary School"، وتم اختيارها مِن قِبل وكالة اليابان للتعاون الدولي جايكا (Japan International Cooperation Agency JICA)[1]. كما تمثَّلت عينةُ الدراسة في دولة سنغافورة بستةٍ مِن معلمي الرياضيات في المدرسة الأدميرالية الابتدائية "Admiralty Primary School"، وهي المدرسة التي وافق مديرها على تطبيق الدراسة في مدرسته[2].

1 تعدُّ وكالة اليابان للتعاون الدولي هي الجهة الرسمية التي يتمُّ مِن خلالها تيسير إجراءات الزيارات باليابان، وبعد اطلاعهم على متطلبات البحث، تم تحديد المدرسة الابتدائية بمدينة فوكوي، كما حدَّدوا عدد أيام الزيارة؛ حيث كان هناك تشديدٌ كبير على دخول الغرباء للمدارس وخصوصا المدارس الابتدائية.

2 كان هناك تشديدٌ كبير جدا في سنغافورة على زيارات المدارس، وتم إبلاغ الباحثة مِن خلال الملحقية الثقافية السعودية بسنغافورة والمعهد الوطني للتعليم بسنغافورة أنَّ الموافقة على الزيارات مرتبطة بقناعة وقبول مدير المدرسة، وقد تواصلت الباحثة مع عددٍ من مديري المدارس هناك على مدى شهرين، إلى أنْ وافق مدير مدرسة الأدميرال الابتدائية على الزيارة ولمدة قصيرة بعد اطلاعه على متطلبات البحث.

أدوات الدراسة

نظرًا لطبيعة البحث النوعي ذي التصميم الحقلي، فقد تمَّ استخدام الملاحظة الصفية المفتوحة التي سُجِّلتْ فيها كافة السلوكيات المُمارسة داخل الصف خلال عرضِ الحصة الدراسية، ومِن ثم تحليل تلك الممارسات وتصنيفها، كما تمَّ استخدام المقابلات المفتوحة غير المنتظمة؛ للإجابة عن الملحوظات التي أظهرتها تلك الممارسات في الصف؛ للإجابة عن أسئلة الدراسة.

مصطلحات الدراسة الإجرائية

الممارسات التدريسية: ويُراد بها: مجموعةُ السلوكيات التي يستخدمها المعلمون داخل الصف؛ لتقديم المحتوى الرياضي بغرضِ بناءِ المعرفة الرياضية: (المفاهيمية والإجرائية) لدى طلاب وطالبات المرحلة الابتدائية.

المعرفة الرياضية: وهي مقدرةُ المتعلمين على معرفة البُنى الرياضية، والنظريات، والإجراءات، بالإضافة إلى إدراك العلاقة بين تلك العناصر، وتوظيفها، ومعرفة النظام التمثيلي الذي يعبِّر عنها.

المعرفة المفاهيمية: وهي مقدرةُ المتعلمين على معرفة الحقائق والمفاهيم وتوظيفها، ومقارنتها بالقواعد المترابطة، وتمييز وتفسير المصطلحات المستخدمة؛ لتمثيل المفهوم.

المعرفة الإجرائية: ويقصدُ بها: قدرة المتعلمين على معرفة القواعد، والخوارزميات اللازمة لإجراءٍ رياضي، ومعرفة الشكل والصياغة الخاصة بالنظام التمثيلي الذي يعبرُ عنها.

الإطار النظري والدراسات السابقة

تعدُّ المعرفة الرياضية بشقيها: المفاهيمي والإجرائي أحد متطلبات تدريس الرياضيات، التي أكدت عليها أفضلُ الممارسات والمبادئ التوجيهية، كـ: المعايير الحكومية الأساسية المشتركة CCSSM. (Common Core State Standards for

(Mathematics, 2010، والمجلس الوطني لمعلمي الرياضيات NCTM (National Council of Teachers of Mathematics, 2014). وقد عرَّف (Haapasalo & Kadijevich, 2000) المعرفة المفاهيمية بـأنَّها: المعرفة بالمفاهيم والقواعد (الخوارزميات والإجراءات وغيرها)، وحتى المشكلات في أشكال التمثيل المختلفة. كما عرفا المعرفة الإجرائية بأنها: الاستخدام الديناميكي والناجح للقواعد، أو الخوارزميات، أو الإجراءات في نموذج التمثيل، أو الشكل المرتبط به. (ص 141). كما أكَّدا على أنَّ المعرفة الإجرائية تتطلَّبُ عادةً خطواتٍ تلقائية وغير واعية، في حين أنَّ المعرفة المفاهيمية تتطلَّبُ عادةً التفكير الواعي، كما قد تتضمَّن المعرفةُ الإجرائية أيضًا بعضَ التفكير الواعي. وقد تعدَّدت وجهاتُ النظر بين المربين في أهمية وأولوية كلِّ نوعٍ مِن أنواع المعرفة الرياضية؛ حيث يرى (Baroody, Feil & Johnson, 2007) أنَّ المعرفة المفاهيمية أكثر قوة وتوليدًا مِن معرفة الإجراءات، كما يرى (Rittle-Johnson; Schneider & Star, 2015) أنَّ العلاقة بينهما عادةً ثنائية الاتجاه، وأيُّ نموٍ في أحدهما يؤدي إلى زياداتٍ لاحقة في الآخر، و أنَّ تطويرَ المعرفة الإجرائية استنادًا إلى فهم المعرفة المفاهيمية له قيمته، ويثير استجاباتٍ متنوعة وعميقة مِن المتعلمين الذين استوعبوا المفهوم. وقد طرح التربويون عدة تقنياتٍ تعليمية تدعم كلا النوعين مِن المعرفة الرياضية؛ إذ اقترح (Rittle-Johnson, Star & Durkin, 2009) تقديم مهامٍ للمتعلمين تتطلَّبُ طرحَ إجراءاتٍ مختلفة وصحيحة لحلِّ مشكلةٍ ومقارنتها، بما يُسهم في تصحيح مفاهيمهم الخاطئة، وتعميق معرفتهم الرياضية. ويرى (Canobi, 2009) أَّن تشجيع الطلاب على التفسير الذاتي عند إتمام إجراءات الحل، مثل: شرح الأسباب التي جعلت الحلول صحيحة أو خاطئة تدعمُ المعرفة المفاهيمية والإجرائية، كما أظهرت دراسة (Schwartz, Chase, Chin & Oppezzo, 2011) فاعلية إتاحة الفرصة للمتعلمين لاستكشاف المشكلة قبل تدريسها؛ حيث أظهرت الدراسة أنَّ الطلاب الذين أنهوا حلَّ المشكلات غير المألوفة قبل الدرس حققوا مكاسبَ أكبر في المعرفة المفاهيمية، ومكاسبَ مماثلة في المعرفة الإجرائية مقارنةً بمن أنهوا حلَّ المشكلات بعد الدرس.

وأكَّدت الدراسات أنَّ تطبيق الاستراتيجيات والأساليب المناسبة للمعرفة

الرياضية تتطلَّب إدارةً بيئيةً صفية داعمة، يُفعَّل فيها المتعلمون بوصفهم مواردًا تعليمية لبعضهم البعض؛ حيث تُتاح لهم فرص العمل المستقلةً بما يُعينهم على التفكير والعمل بهدوء، بالإضافة إلى العمل التعاوني على هيئة أزواج أو مجموعات صغيرة؛ يعملون فيها كمجموعةٍ بدلا مِن العمل في مجموعة، وهذا يمكنهم من المشاركة النشطة الهادفة مع الصف كاملا في مناقشة الأفكار؛ وتوضيح فهمهم، والتعرُّض لتفسيراتٍ أوسع للأفكار الرياضية الأخرى المطروحة مِن قِبل زملائهم والتعلم مع الآخرين بفعالية أكبر (Anthony & Walshaw, 2009). ونظرا لما أظهرته نتائج اختبارات التوجهات الدولية للعلوم والرياضيات تيمز (TIMSS, 2015) مِن تقدُّم في مستوى تحصيل طلاب دول شرق آسيا عالميا؛ حيث حصل طلاب الصف الرابع بدولة سنغافورة على المستوى الأول، وطلاب دولة اليابان على المستوى الخامس، كما أظهرت النتائج أنَّ معدل تحصيل طلاب كلتا الدولتين في ازدياد منذ 1995–2015، لذا تشجَّع التربويين بالبحث عن الممارسات الصفية الفعالة لمعلمي دول شرق آسيا، وأظهرت الدراسات أنَّ منهج الرياضيات في كلتا الدولتين يحتوي على مفاهيم أساسية أقلّ مِن تلك التي حددها المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات للمدارس الأمريكية، الأمر الذي أسهم في طرحهم للمهارات بمزيدٍ من العمق أعانت طلابهم على تطوير فهمهم للعلاقات الرياضية. (Burghes & Robinson, 2009; Mullis, Martin, Foy & Hooper, 2016).

وتؤكد وزارة التعليم بسنغافورة (Ministry of Education, 2012) على ضرورة عدِّ حلِّ المشكلات الرياضية محوراً مركزياً لمنهج الرياضيات السنغافوري، على أنَّ تدرس المفاهيم والمهارات باستخدام طريقة العرض لبرونر، الذي يتم فيه التعلُّم بالتدرج في ثلاثة مستويات بما يتوافق مع مراحل نمو المتعلمين، ويدعى بالأسلوب النشط؛ حيث يعرضُ المعلم المفاهيمَ والمهارات باستخدام العديد مِن اليدويات والنماذج وغيرها من الأنشطة العملية، يليه الأسلوب التصويري أو التمثيلي، ليختم بعد ذلك بالأسلوب الرمزي أو التجريدي.

وقد شجَّعَ ذلك العديد من الدول على تطبيق المنهج السنغافوري، وإجراء الدراسات للتحقق من فاعليته، ومِن ذلك دراسة (Jerrima & Vignoles, 2016)

ودراسة (Blalock, 2011) اللتين أظهرتا وجود تأثيرٍ إيجابي للبرنامج؛ ظهر فيه تطورٌ للمعرفة وللمهارات الرياضية لدى طلاب المجموعة التجريبية خاصة لدى الطلاب الأضعف في التحصيل، كما أظهرت نتائج الدراستين قدرة البرنامج على تقديم عوائد اقتصادية كبيرة. كما اهتمَّت العديدُ مِن الدراسات بوصف واقع الممارسات التدريسية في دولة سنغافورة، ومن تلك الدراسات: دراسة (Ho & Wong, 2015) التي ركزت على ملاحظة الممارسات الصفية لستة معلمين في المرحلة الابتدائية في ثلاث مدارس ابتدائية بسنغافورة، وتركَّزت الملاحظة على ممارساتِ المعلمين الصفية، وممارسة الطلاب لحلِّ المشكلات، والعمل بين الطلاب. وكذلك دراسة (Teong et al., 2009) التي رصدت ملاحظات صفية لمعلمي الرياضيات بعدد 106 ملاحظة صفية بالمرحلة الابتدائية، و(53) ملاحظة صفية بالمرحلة المتوسطة، واتفقتْ النتائجُ على غلبة المدخل التقليدي على ممارسات المعلمين؛ إذ يقدِّم المعلم الموضوع، مع إعطاء الطلاب الوقت المناسب لممارسة المهارات ذات الصلة، وفي نهاية الموضوع تُقدَّم المشكلات باعتبارها جانبًا إضافيًا تكميليًا للبرنامج التدريسي الاعتيادي، وغالبا ما يتمّ التعامل مع المشكلات الروتينية المغلقة باستخدام (مخطط / نموذج)، كما يميلُ المعلمون عند تقديم المشكلات إلى قراءتها بسرعة والشروع في تنفيذ الحلول على الفور، كما يحرص المعلمون على توفير التدريب للطلاب؛ للتأقلم مع أنواع المشاكل التي قد يرونها في التقييم الرسمي. كذلك أظهرت نتائج دراسة (Leong; Ho & Cheng, 2015) أنَّ المنهج التعليمي المشترك في فصول الرياضيات الدراسية في سنغافورة هو التعليم المباشر لـ (المجرد) – القواعد، والرموز، والتقنيات ذات الأسئلة المحددة – دون البدء بالمحسوسات لبناء المفاهيم.

وبالنظر إلى تعليم الرياضيات في اليابان نجد أنَّها مِن الدول التي ارتفع معدل نتائجُ طلابها ارتفاعًا سريعًا؛ حيث حصلت على أفضل أداءٍ في القراءة، والرياضيات، والعلوم في اختبارات تقييم الطلاب الدولي بيزا (Programmer for International Student Assessment, 2012)، وفي نتائج المسح الدولي للتعليم والتعلُّم تاليس the Teaching and Learning International Survey (TALIS).

(OECD, 2015)؛ حيث تسعى أهداف تعليم الرياضيات بالمرحلة الابتدائية في اليابان إلى مساعدة المتعلمين مِن خلال الأنشطة الرياضية على اكتساب المعارف والمهارات الأساسية لتعزيز قدرتهم على التفكير والتعبير بآراءٍ جيدة ومنطقية في أمور الحياة اليومية، ومساعدتهم في العثور على المتعة في الأنشطة الرياضية، وتقدير قيمة المناهج الرياضية، وتعزيز موقفهم؛ للاستفادة مِن الحساب في حياتهم اليومية وفي تعلمهم (Ministry of Education Culture Sports Science & Technology Japan, 2008). كما اهتمَّ المختصون بتعليم الرياضيات في اليابان بتوظيف حلِّ المشكلات اللفظية في خطة منهج الرياضيات بالمرحلة الابتدائية؛ لتعزيز قدرة الطلاب على التفكير المنطقي، وقد انعكس ذلك بدوره على طرق التدريس؛ حيث أظهرت دراسة (Burghes & Robinson, 2009) أنَّ طريقة حل المشكلة المنظم هي الطريقة المستخدمة لتدريس الرياضيات في اليابان بالمرحلة الابتدائية، والتي تهدف إلى خلق الاهتمام بالرياضيات، وتحفيز النشاط الرياضي الإبداعي في الفصول الدراسية مِن خلال العمل التعاوني للطلاب. وأظهرت دراسة (Stigler & Hielbert, 1999) أنَّ الإطار العام لتعليم الرياضيات في اليابان يُعنى بالاختيار الدقيق والمتماسك لكلمات المشكلة وأنشطتها، والمناقشة الواسعة المتعمقة، ويعدُّ هذا أحد أهم أدوار المعلم خلال الدرس بعد طرح الطلاب حلولهم، كذلك التركيز على استخدام السبورة؛ حيث تُصمَّم كلّ دروس الرياضيات في اليابان لحل مشكلة واحدة؛ لتحقيق هدفٍ واحد في الموضوع، ونادرا ما يُرى أنَّ الدرس يتضمن نشاطين أو أكثر في حلِّ المشكلات؛ حيث يقدم المعلم المشكلة دون أيِّ توجيهات للحل، ويطلب مِن المتعلمين طرح حلولهم وأفكارهم، ثم يعمل على توسيع المناقشات في حلول الطلاب بما يعمق فهم المفاهيم، ويصحح التصورات الخاطئة، وفي نهاية الدرس يوجه الطلاب للعمل على تلخيص الدرس من خلال التفكير مما تعلموه.

ويعدُّ شكل ووظائف التلخيص في الفصول الدراسية اليابانية مِن السمات الرئيسية للممارسات الصفية؛ وهذا ما أظهرته دراسة (Shimizu, 2006) التي اهتمت بمقارنة إحدى مراحل الدرس الخاص (بالتلخيص) (Matome) في صفوف أستراليا، وألمانيا، والصين، واليابان، والولايات المتحدة الأمريكية، وخلصت نتائجها إلى أنَّ المعلم

في اليابان يوظف التلخيص في الدروس من خلال المحادثات العامة مع طلاب الصف، والاستخدام الفعال للسبورة، والإشارة إلى الكتاب المدرَّس، وهو وسيلته المعينة في تجميع حلول الطلاب بما يحقق أهداف الدرس. كما يعدُّ المختصون في اليابان استراتيجية طرح الأسئلة مِن الممارسات التدريسية التي يتم بها التحقق مِن جودة وسلامة عرض المحتوى الرياضي بما ييسر ويعمِّق بناء المعرفة الرياضية؛ حيث أظهرت دراسة (Koizumi, 2013) أنَّ معلمي الرياضيات في اليابان يطرحون أسئلةً أكثر مِن عدد الكلمات التي يذكرها الطلاب، وعادة ما يستخدمون نوعين مِن التفاعل الصفي: أحدهما يتطلب من الطلاب استجابةً لفظية مِن خلال إضافة سؤال إلى سؤالٍ سابق؛ بهدف تعميق المفهوم، أو لتوضيح إجابات الطلاب. والآخر: يتطلب تقديم طريقة الحل على السبورة، كما أظهرت أنَّ المعلم يعرض مفهوماً واحداً جديداً فقط في الدرس مِن خلال حلقة واحدة طويلة تتكوَّن مِن عدة أسئلة، يشارك فيها المعلمون والطلاب في تفاعلات متكررة، مع التركيز على هذا المفهوم الرياضي.

إجراءات الدراسة

أولاً- تمَّ تحديد عينة الدراسة، وجدول الملاحظات الصفية وِفق الإجراءات التنظيمية المُتَّبعة في كلٍّ من دولتي سنغافورة واليابان؛ حيث تمَّ التواصل مع وكالة اليابان للتعاون الدولي جايكا (JICA)؛ للسماح بتطبيق الدراسة، وتمَّ عن طريقها تحديد المدينة والمدرسة، حيث تم ترشيح مدرسة بمدينة فوكوي؛ لكون نتائج تحصيل طلابها هو الأعلى على مستوى الدولة بحسب ما أظهرته نتائج اختباراتهم الوطنية. وتم ترتيب جدول الزيارة وِفق متطلبات البحث، وبما تسمح به المدرسة في (25 سبتمبر – 5 أكتوبر) من العام 2017؛ حيث تمَّت زيارة المدرسة، وتطبيق أدوات الدراسة مِن ملاحظةٍ ومقابلة على عينة الدراسة المكونة من 6 معلمين من معلمي الرياضيات في المدرسة[3].

[3] استفادت الباحثة أثناء وجودها في اليابان مِن عقد مقابلة مع كلٍّ من الأستاذ الدكتور: "ياناقاسوي"، رئيس قسم الإعداد المهني لمعلمي الرياضيات بجامعة فوكوي باليابان، أستاذ المناهج وطرق تدريس الرياضيات، وكذلك وكيل المدرسة الابتدائية المختص بمناهج تعليم وتعلم الرياضيات؛ للحصول على بعض الإجابات والدراسات عن ممارساتهم التدريسية.

أما بالنسبة لدولة سنغافورة فقد تمَّ التواصل مع المدارس مباشرةً؛ لكون إجراءات الزيارة ترتبط بالمدرسة ومدى تقبل مدير المدرسة للتطبيق، وقد حرصت الباحثة على الاستفادة من المدارس التي تفتح أبوابها للزيارات الدولية؛ للاستفادة من ممارساتها التدريسية، ومن هذه المدارس: مدرسة (أدميرال Admiralty" Primary school") الابتدائية، التي سمح مديرها للباحثة[4] بزيارتها، وهي مِن المدارس الغنية بتجاربها وممارساتها؛ لكونها مِن المدارس الحاصلة على عددٍ مِن الجوائز على مستوى دولة سنغافورة، كما أنَّها من المدارس التي تفتح المجال للزيارات الدولية، وقد تمت الزيارة في الفترة[5] 7–18 يناير من العام 2018.

ثانيًا– قامت الباحثة بملاحظة المعلمين (عينة الدراسة) في الدولتين طوال الحصص الدراسية، مستخدمةً الملاحظة المفتوحة، التي سُجِّلت فيها كافة السلوكيات الممارسة خلال الحصة، وفي دروس منوعة مِن مادة الرياضيات من الصف الأول إلى الصف السادس الابتدائي؛ حيث تم في اليابان وسنغافورة[6] ملاحظة الممارسات التدريسية لـ6 معلمين من معلمي مادة الرياضيات، وكانت مدة كلِّ حصة دراسية في اليابان 50 دقيقة؛ أما في سنغافورة فقد كانت مدة كلّ حصة 60 دقيقة، وقد استخدمت الباحثة في الملاحظة الصفية التسجيل الكتابي، مع بعض تسجيلات الفيديو المتقطعة في كلِّ حصة، والتقاط بعض الصور، كذلك استخدمت

4 استمرت الباحثة بالتواصل مع المدارس بالإيميل عدة شهور إلى أنْ تمت الموافقة مِن مدير المدرسة على الزيارة.

5 استفادت الباحثة خلال وجودها في دولة سنغافورة حضور مؤتمر "ICSEI 2018 Conference " في المعهد الوطني للتعليم بسنغافورة؛ حيث قابلت عدداً مِن الأساتذة الجامعيين والمعلمين، وحصلت منهم على بعض الاستجابات، الأمر الذي ساعدها في توضيح النمط التدريسي.

6 أحد معلمي الرياضيات في سنغافورة هو رئيس قسم الرياضيات في المدرسة، وهو حاصل على شهادة الدكتوراه، بالإضافة إلى دوره معلمًا في الرياضيات، ويقع على عاتقه الاجتماع دوريًا مع المعلمين، والاطلاع على ملفات إنجازهم؛ للتعرف إلى سير الدرس، وأهم المشكلات التي يجب معالجتها، كما يطلع معهم على نتائج الطلاب، ويتفقون على الاختبارات الدورية، وسبل متابعة نتائجها، كما يتفق معهم على حصص التقوية، ويتم توزيعها بينهم؛ للعمل بجد على وصول طلابهم حدَّ الإتقان المطلوب، مع ملاحظة أنَّ معظم المدارس الابتدائية بسنغافورة لها رئيس قسم للرياضيات.

الكتابة في المقابلات غير المنتظمة التي كانت تأتي مباشرة بعد انتهاء الحصة التدريسية لكلِّ معلم. وبعد ذلك، صنَّفت الباحثة تلك الممارسات إلى عدة محاور، وهي: النمط التدريسي الممارس، ودور المعلم في العملية التدريسية، ودور المتعلِّم في العملية التدريسية، والأنشطة الصفية، والبيئة الصفية، و جُمِّعت تلك البيانات وفق تلك المحاور وحُلِّلتْ وفُسِّرَت؛ لتحديد الممارسات التدريسية اللازمة؛ لبناء المعرفة الرياضية في كلِّ دولة، وربط ما توصلت إليه نتائج الدراسة بما أشارت إليه الدراسات البحثية الخاصة بدراسات المقارنات الدولية مِن نتائج دراسة الفيديو للتوجهات الدولية، وأوراق عملٍ، وتوصيات المؤتمرات، واللقاءات العلمية، ومن المعلومات التي تحصلت عليها مِن موقعي وزارتَي التعليم في دولتي اليابان وسنغافورة.

ثالثًا– قامت الباحثة بمقارنة الممارسات التدريسية في دولتي (اليابان وسنغافورة)، وتحديد السمات المشتركة، والممارسات التي أظهرت الملاحظات والدراسات جودتها في بناء المعرفة الرياضية، وتحديد الممارسات التدريسية اللازمة؛ لبناء المعرفة الرياضية لطلاب وطالبات المرحلة الابتدائية في المملكة العربية السعودية.

نتائج الدراسة

بدايةً سيتم الإجابة عن الممارسات التدريسية في كلِّ دولةٍ على حدة وفق ما يأتي:

أولا– الممارسات التدريسية؛ لبناء المعرفة الرياضية في اليابان:

* **النمط التدريسي:** أظهرتْ الملاحظة الصفية المفتوحة، والمقابلات غير المنظمة للمعلمين (عينة الدراسة) أنَّهم يتبعون نمطًا تدريسياً واحداً متماسكاً عند عرض محتوى جديد، وهو نهج حل المشكلة المنظم، الذي يمرُّ بعدة مراحل، هي:

المرحلة الأولى: طرح المشكلة، وتوضيح معناها الواقعي والرياضي؛ حيث تتم مِن خلال نشاط فردي، أو مجموعة الفصل ككل بتسلسل بحسب الخطوات الآتية:

1 – يعرضُ المعلم مشكلةً حياتيةً وواقعيةً وقريبةً مِن أفهام الطلاب مِن خلال نموذجٍ تصويريٍّ حياتي، ويناقشهم في مكوناتها، ثم يكتب المسألة ويقرأها، ثم يوجه الطلاب لكتابة المسألة كتابةً فردية في دفاترهم مع قراءتها، وأخيرًا يوجههم لقراءة المسألة قراءةً جماعية مرتين على أنْ يقوم هو بقراءة المسألة معهم أول مرة.

صورة توضح معلم الصف الأول والثاني الابتدائي، وهما يعرضان المشكلة مِن خلال نموذج تصويري يجسد المشكلة اللفظية قبل عرضها عرضًا لفظيًا وكتابيًا.

وقد أظهرت نتائجُ المقابلات أنَّ الهدفَ مِن استخدام المعلم وطلابه استراتيجية كتابة السؤال مع القراءة أثناء الكتابة، وتكرار ذلك هو تنمية التفكير، وبناء معرفةٍ رياضية سليمة قائمة على خبرات الطلاب القبلية، يتضِحُ فيها المعنى الرياضي والواقعي للعبارة؛ حيث أوضحوا أنَّ الكتابة عادةً تأخذ وقتاً أكبر من الحديث، وهذا يعطي الطالب فرصة لهدوء التفكير تجعله يتحقق مِن مستوى معرفته، ويحدد ما استجدَّ عليه ويريد توضيحه؛ لذا يستخدمون الكتابة والقراءة؛ ليفكر الطالب فيما يكتبه تفكيرًا أعمق وأكثر وعيا.

2 – يطلب المعلم مِن طلابه وضع خطٍ تحت العبارات التي يرونها (مهمة) في المسألة، أو التي يودون مناقشتها في دفاترهم، وقد أظهرتْ نتائج المقابلات

أنَّ الهدف من ذلك تحفيز جميع المتعلمين في فهم المشكلة بما فيهم الطلاب ضعيفي التحصيل، وتحويل عقول الطلاب إلى التعمق في قراءة السؤال، والتأكُّد مِن فهمهم لكلِّ عباراته، كما أكدت النتائج أنَّ هذه الخطوة هي نقطة انطلاق الدرس وفق احتياجات المتعلمين ليكون ذا معنى بالنسبة لهم.

3 – يطلب المعلم مِن أحد طلابه تحديد تلك الكلمات على المسألة المكتوبة على السبورة، ويحدِّدُ عدد الطلاب الراغبين في توضيح ومناقشة تلك الكلمة أو المفهوم، وهكذا إلى أنْ يُحدد الطلاب كلَّ ما يرغبون بتوضيحه في المسألة، ثم يناقشهم عما يعرفونه مِن معاني تلك الكلمات، ويدوِّن على السبورة الإجابات التي ذكروها بلغتهم الخاصة نفسها، ثم يطرح أسئلةً عن تلك الإجابات؛ لتعميق المعنى أو تصحيحه؛ حيث يشجع المعلم طلابه على المشاركة والحديث، ويستمعُ إلى كلِّ طالبٍ لديه مفهوم مغاير أو مشابه، ويكتب كلَّ المصطلحات التي ذكرها الطلاب، وبعد الانتهاء مِن كل المداخلات التي لا يتجاوز وقتها 3 دقائق، يناقش المعلم طلابه مناقشةً جماعية فيما هو مدون، ويوجههم لإعادة قراءة المسألة، ومقارنة سياق المسألة بالمصطلحات التي ذكرها الطلاب وتقويم المكتوب.

وأظهرتْ نتائج المقابلات أنَّ الهدف مِن استخدام المعلمين لاستراتيجية طرح الأسئلة المكثفة هو توجيه الطلاب، لتعميق المعرفة الرياضية، وإدراك العلاقات الموجودة في المسألة، كما أوضحوا أنَّ الهدف مِن كتابة مصطلحات الطلاب على السبورة بلغتهم نفسها هو مساعدتهم على التعبير عن فهمهم ومشاهدة ما يفكرون به، وتأمل عملياتهم العقلية، وتصحيح فهمهم، كما أظهرت نتائج المقابلات أيضا أنَّ الهدف مِن عرض جميع التوضيحات التي يطرحها الطلاب على السبورة ومناقشتها معهم هو مساعدة الطلاب على رؤية وتقييم تفكير زملائهم، ومقارنته بتفكيرهم؛ لبناء معرفةٍ مفاهيمية قوية، وتوسيع استيعابهم لها، كما أوضحوا أنَّ هذه الإجراءات هامة للطلاب؛ لأنها تدربهم على الوعي والتفكير بالمسألة وفهمها، كما تعين المعلم في الكشف عن كافة المعاني المتداخلة عن المفهوم في عقول طلابه، وتحديد خبراتهم السابقة، الأمر الذي يساعده على التوضيح مِن خلال المناقشة،

وهذا ما يسوِّغ استخدام المعلمين للأنشطة الفردية وأنشطة الصف ككل خلال هذه المرحلة بالذات.

المرحلة الثانية؛ تطوير الحل: أظهرت الملاحظة الصفية أنَّ هذه المرحلة ينجزها المتعلمون بمفردهم مِن خلال العمل في مجموعاتٍ صغيرة مكونة مِن ثلاثة طلاب، أو باستخدام الأنشطة الفردية أولا، ثم الانتقال إلى العمل في مجموعات صغيرة، ويوجه المعلم طلابه لتمثيل المشكلة باستخدام التمثيلات المحسوسة كقطع العد؛ حيث يناقش فيها المتعلمون المشكلة، ويبتكرون الحلول بطريقتهم الخاصة، ويكتبون الحل في ألواحٍ بيضاء خاصة بهم، ويتابع المعلم حلولهم، ويستمع لمناقشاتهم. وتستغرق هذه المرحلة قرابة نصف زمن الحصة. وقد أظهرت نتائج المقابلات مع المعلمين أنَّ الهدف من هذه المرحلة جعل الطلاب يبتكرون حلولهم، ويفهمون العلاقات بين المفاهيم داخل المشكلة الرياضية، ويختبرون مدى صحة إجراءاتهم، ومدى جودة خياراتهم في العمليات الرياضية من خلال المحاولات والتجريب، كما أنَّها تساعد المتعلمين على تعميق خبراتهم السابقة، واستكشاف قواعد العمليات الرياضية، والخطوات الإجرائية، الأمر الذي يزيد من خبرة المتعلمين في ربط المعرفة المفاهيمية بالإجرائية، كما أنَّها تساعد على تعميق وعي المتعلم، وفهمه للعمليات وقواعدها، واكتشاف أخطائه في التطبيق، كما أنَّ المعلم خلال هذه المرحلة يستمع لمناقشات طلابه وحلولهم، ويستفيد منها في عمل المناقشات في المرحلة التالية؛ لذا يرون أنَّه مِن المهم توفير الوقت الكافي للطلاب للتفكير في الحل.

مثال على ذلك: عند تقديم درس (أنواع المثلثات بحسب أطوال أضلاعها) وزعت المعلمة أكياسًا بها مجموعةٌ من الأعواد الملونة ذات أطوال مختلفة، وطلبت منهم تشكيل مثلثاتٍ من تلك الأعواد، ووجهتهم إلى العمل توجيهًا فرديًا، وبعد الانتهاء طلبت منهم عرض أعمالهم ومناقشتها في مجموعاتٍ صغيرة مكونة من ثلاثة طلاب؛ حيث استمرَّ العمل قرابة 20 دقيقة؛ وكانت المعلمة تستمعُ إلى تعليقاتهم ومناقشاتهم وحلولهم. وقد أظهرت نتائج الملاحظة الصفية والمناقشات

مع المعلمة أنَّ الهدف مِن ذلك هو تطوير الحل، واستكشاف قاعدة تصنيف المثلثات بحسب أطوال أضلاعها؛ إذ يُقدِّم هذا النشاط تصميمات ومعلوماتٍ متعددة من كلِّ طالب في المجموعة، وعلى الطلاب في المجموعات مقارنة وتحليل إجاباتهم، وملاحظة أشكال المثلثات وموازنتها بما توصلوا إليه؛ حيث صنفها البعض وفق اللون، وآخرون جعلوا لكلِّ ضلعٍ في المثلث لونًا مختلفًا، والبعض جعل لكل ضلعين في المثلث اللون نفسه، وهذا هو الهدف من مرحلة تطوير الحل في هذا الدرس وهو أن يستكشف المتعلمون اختلاف الأشكال، والبحث عن الصفة التي تجمعها، الأمر الذي يسهل عليهم الوصول إلى قاعدة تصنيف المثلثات.

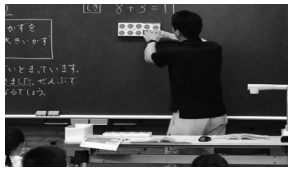
المرحلة الثالثة؛ التقدم مِن خلال المناقشة؛ حيث أظهرت نتائج الملاحظات الإجراءات الآتية:

يطلب المعلم مِن إحدى المجموعات كتابة حلهم على السبورة، مع شرح وتوضيح الطريقة التي استخدموها في الحل أمام زملائهم بالصف، أو قد يكتب المعلم الحل والخطوات بلغة الطلاب نفسها، ثم يوجه الطلاب ممن لديهم طرق أو إجابات أخرى للخروج وكتابة إجاباتهم وإجراءاتهم، ويحرص على ألا يؤيِّدَ أيَّ طريقة، كما يوجِّه بقية الطلاب للاستماع إلى ما يُطرح مِن حلولٍ وتفسيرات، ويوجه مناقشاتهم للوصل إلى فهمٍ مشترك، وحلول أفضل مِن خلال مناقشة النقاط القوية والضعيفة لكلِّ طريقة. وأثناء مناقشات الطلاب، يتفاعل المعلم معهم، ويعيد تمثيل المشكلة باستخدام اليدويات، ويترجم المسألة مِن عباراتٍ لفظية إلى تمثيلٍ محسوس، وخلال تطور المناقشات ينتقلُ إلى التمثيل الرمزي للعملية وصولا إلى الناتج النهائي، ثم يدون ما تم التوصل إليه مِن إجراءاتٍ وقوانين على السبورة، مع وضع إطار على القوانين التي توصلوا إليها، ثم يطلب منهم قراءتها،

مع تكرار القراءة تكرارًا جماعيًا. وأخيرا، يعرض تمريناً آخر، ويطلب حلَّه فرديًا، ويتابع الطُّرق التي يستخدمها التلاميذ في الحل ويناقشهم فيها، ويؤكد على ضرورة تمثيل المسألة تمثيلًا حسيًا باستخدام اليدويات أو الأشكال، وفي نهاية المرحلة يستخدم المعلم دفترًا خاصاً به يحل فيه التدريبات مع الطلاب، كما يختار مِن الطلاب مَن يخرج؛ ليحل أحد التدريبات في الدفتر، ويسلط الكاميرا الوثائقية؛ ليتابع الطلاب طريقته في التنظيم والترتيب والكتابة.

وأظهرتْ نتائج المقابلات مع المعلمين أنَّ هذه المرحلة لها أهميتها، وفيها يتم العناية بالمعرفة الإجرائية، وربطها بالمعرفة المفاهيمية، ويعتمد فيها اعتمادًا كبيرًا على التدرج في عرض المفهوم من المحسوس للتصويري ومنه للمجرد، وأكدوا على أهمية هذه المرحلة في تعميق المعرفة الرياضية التي يقع على عاتق المعلم الدور الكبير في توجيه وإدارة النقاش، وتصحيح المفاهيم الخاطئة باستخدام الأسئلة، كما أكدوا على أهمية أنْ يتدرب الطلاب على الكتابة الرياضية المنظمة، وأنْ يشاهدوا طريقة استخدام المعلم للمسطرة والألوان؛ تُستخدم الكتابة المنظمة على السبورة، وفي مرحلة اكتساب المهارة يستخدم المعلم دفترا مثل دفاتر الطلاب، ويحلّ أمامهم لينمذج أمامهم الطريقة المنظمة للكتابة الرياضية.

مثال على ذلك: عند عرض المعلم درس جمع عددين ناتج جمعهما أكبر مِن 10 لطلاب الصف الأول الابتدائي، ويهدف إلى تعميق مفهوم جمع الأعداد الأكبر مِن عشرة أولاً، ومِن ثم معرفة إجراءات الجمع، كان على المعلم ربط قواعد العمليات الحسابية، ومفهوم الأعداد التي درسها الطلاب سابقا؛ حيث إنَّ لليابان خصوصية في قراءة الأعداد الأكبر مِن 10، فمثلًا: العدد 11 ينطق بـ 10 و1، والعدد 21 يسمى: بـ 2 عشرة و واحد، وهكذا...، كما أنَّ الطلاب مِن خبراتهم السابقة عند جمع أو طرح الأعداد التي ناتجها أقل أو يساوي 10 يستخدمون نمط العد للعدد 5؛ إذ لا يستخدم الطلاب العد المباشر؛ لذا تُصَّمم قطع العد التي يستخدمها المعلم وطلابه وفق نمط العدد 5، بحيث تتكوَّن مِن 10 قطع مرتبة في صفين، كل صف فيه 5 قطع.



ففي المشكلة المعروضة الخاصة بمواقف السيارات، بدأ المعلم الدرس بعرض مشكلةٍ حياتية لموقف سيارات يكفي لـــ 10 سيارات، وتقف فيه 8 سيارات فقط، ويوجد 3 سيارات بالخارج تريد الدخول إلى المواقف، و استخدم المعلم السبورة الذكية؛ لعرض النشاط، وقدمه بالعرض المتحرك، وناقشهم في محتوى الصورة المعروضة باستخدام طرح الأسئلة، مثل: ماذا تشاهدون؟ هل رأيتم مع أهلكم منظرًا كهذا؟ ما الشيء الموجود في الداخل؟ كم عدد السيارات التي في الخارج؟ ماذا تريد السيارات التي في الخارج؟ ثم حدد معهم المعطيات والمطلوب مِن خلال مكونات الصورة.

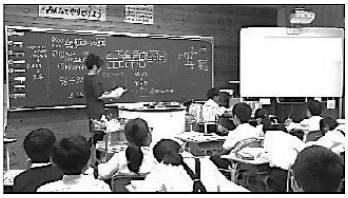
كتب المعلم السؤال على السبورة، وطلب مِن الطلاب تسجيله في دفاترهم وقراءته بصوتٍ مسموع، وبعد مرحلة عرض المشكلة وتطوير الحل، انتقل بهم إلى مرحلة المناقشة، فبعدَ أنْ مثَّل الطلاب الموقف باستخدام قطع العد، ومثلوا الحل، تابع المعلم عملَ المجموعات، وبعد ذلك سأل كلَّ مجموعةٍ ماذا عملت، ومثَّل معهم المشكلة باستخدام قطع العد تماما كما هو في الصورة، وترجمها إلى رموز بـ5 قطع في الأعلى، و3 قطع في الأسفل، ثم كتب في يسار صندوق قطع العدِّ العددَ الذي يمثله كلُّ صفٍّ وكتب 5 في الأعلى، و3 في الأسفل يسار قطع العد في الصف السفلي، وسأل: كم عدد السيارات في المواقف؟ أجاب الطلاب 8 سيارات، ومثَّل المعلم هذه العملية بـــ (5) + (3) = 8. ثم سألهم بعد ذلك ماذا سنعمل؟ أجاب الطلاب بأنَّه يمكن أنْ تدخل سيارتان إلى الموقف؛ لوجود مكانٍ لهما، وهنا أضاف

المعلم قطعتين ووضعهما في المكان الخالي، وسأل: كم عدد السيارات في الموقف الآن؟ أجاب الطلاب: 10 سيارات، ثم سأل: كم المتبقي؟ أجاب الطلاب: سيارةً واحدة في الخارج. ولكي يعمِّق المعلم فهم الطلاب للقيمة المنزلية ومعناها الواقعي سألهم قائلاً: تبَّقى في الخارج قطعةٌ واحدة لم تدخل الصندوق، هل يمكن وضعها فوق القِطع الداخلية؟ أجاب الطلاب: لا نستطيع وضع السيارة المتبقية فوق بقية السيارات في الموقف، وهذا يعني تشكيل الصورة الذهنية لمعنى الجمع لعددٍ أكبر مِن 10 في أذهان الطلاب، ثم وضَّح لهم المعلم ما يمثله العدد 11 في الواقع الفعلي لهذه المشكلة؛ إذ قال: هذا يعني: "عشر سيارات في الموقف، وسيارة في الخارج"، وبعد التأكُّد مِن استيعاب الطلاب للمعرفة المفاهيمية، انتقل المعلم لتمكين طلابه مِن المعرفة الإجرائية في نهاية هذه المرحلة، وكان أعاد إجراءات الحل، وفي كلِّ مرةٍ يستخدم قطعَ عدٍّ جديدة، ويثبتها أمامهم على السبورة؛ ليلحظ الطلاب تتابع عملية الجمع وترتيبها، ويطلب منهم إعادة تمثيل الحل لعدة مرات بأنفسهم على قطع العد الخاصة بهم، ثم يوجههم بعد ذلك لحل تطبيقات أخرى وتمثيلها، والتدرج في الحل وصولا إلى التعبير الرمزي، ثم انتقل إلى التدريبات الموجودة في الكتاب وطلب منهم حلَّها فرديًا، ثم وجههم لمتابعة ومراجعة طريقتهم، وذلك بمتابعة حلِّه أولا، ثم حلّ أحد الطلاب للتدريب باستخدام دفترٍ خاص به يتم تصويره بالكاميرا الوثائقية التي تسمح لجميع الطلاب بمتابعة الحل ومقارنته بحلهم.

المرحلة الرابعة؛ مرحلة التلخيص: وفيها يُلخص المعلم النتائج التي توصَّل إليها طلابه، مع التأكيد على النقاط المهمة التي يتناولها الدرس، (مثل: القيمة المنزلية للعدد 10) وبعد ذلك يكتب الطلاب ما تعلموه في دفاترهم، ثم يُنهي الحصة بتوجيه الطلاب؛ للتأمل فيما تم تقديمه في الدرس؛ حيث يسألهم عما تعلموه في الدرس، ويستمع لإجاباتهم، ثم يسترجع معهم على السبورة ما تم عمله في الحصة؛ ليراجع معهم ما تعلموه، ثم يسألهم عن تأملاتهم.

* **الممارسات التي يقوم بها المعلمون داخل الصف؛ لبناء المعرفة الرياضية لدى طلاب المرحلة الابتدائية:**

أظهرت الملاحظة الصفية والمقابلات أنَّ دور المعلم الرئيس في الصف يتمثل في:إثارة تفكير المتعلمين مِن خلال طرح أسئلةٍ أكثر عن المعلومات التي يقدمها؛ حيث يستخدم المعلم أسئلةً متتالية مِن خلال إضافة سؤالٍ إلى سؤال سابق، الأمر الذي يُسهم في جعل تفكير الطالب وإجابته أكثر وضوحا لنفسه ولزملائه. ولتكون الإجابة أكثر تحديدا يطرحُ المعلم أسئلةً تهدف إلى حثِّ الطلاب على التأمل في إجاباتهم وإجابات زملائهم، وعمل المقارنات فيما بينها، لتعميق الفهم والتقييم والتصحيح، مع حرصهم على توفير واستخدام اليدويات والنماذج عند تقديم المعرفة الرياضية. كما يعتني المعلم بالكتابة الرياضية، وينوع في ممارستها؛ حيث يستخدم السبورة بكلِّ دقة طوال المراحل الثلاث الأولى مِن استراتيجية نهج المشكلة، ولا يكتفي بإجابة الطلاب اللفظية؛ بل يطلب منهم تقديم إجاباتٍ مكتوبة، ويشجعهم على الكتابة في دفاترهم وفي اللوح الأبيض، كما يشركهم أيضا في الكتابة على السبورة، ويحرص على نمذجة الكتابة الرياضية المنظمة عندما يكتب في دفتره الخاص أثناء حلِّ التدريبات، بالإضافة إلى عناية المعلم الفائقة بتنظيم استخدام السبورة؛ حيث تُثبَّت القواعد الصفية، وتُوزَّع المجموعات في أقصى اليسار مِن السبورة، ويدون أمامَ كلِّ مجموعةٍ مدى تقدمها وامتيازاتها.



* **الممارسات التي يقوم بها المتعلم داخل الصف؛ لبناء المعرفة الرياضية:** أظهرت نتائج الملاحظة الصفية والمقابلات مع المعلمين أنَّ الطالب هو محور العملية التعليمية، وأنَّ جميع الممارسات تهدفُ إلى أنْ يبني الطلاب معارفهم بأنفسهم؛ حيث يُقدَّم لهم المحتوى الجديد من خلال مشكلات حياتية تتطلب أنْ يظهروا فهمهم وخبراتهم السابقة نحوها، مع ربط الخبرة الحالية بالخبرات السابقة، على أنْ يرتكز تعلمهم على استخدام المحسوسات، مثل: اليدويات، والمناقشات العميقة بينهم وبين المعلم، وبينهم

وبين مجموعاتهم التي تعدُّ أداة التأمل، وتصحيح المفاهيم، وتقويميها، وهذا اتضح في الممارسات التي قام بها الطلاب أثناء عرض الدروس.

فعلى سبيل المثال: في درس (تصنيف المثلثات وفق أطوال أضلاعها) عمل الطلابُ على اكتشاف أنواع المثلثات مِن خلال استخدام أعوادٍ لها أطوال وألوان مختلفة، وزعتها المعلمة عليهم، وطلبت منهم تشكيل أكبر عددٍ ممكن مِن المثلثات باستخدام كلِّ الأعواد، وتركت الطلاب يطبقون هذا النشاط تطبيقًا فرديًا، بينما كانت تتابع أعمالهم، فأنشأ الطلاب مثلثاتٍ بتصنيفات مختلفة، فمنهم مَن شكَّل مثلثاتٍ لأضلاعها اللون نفسه، وصمَّم آخرون مثلثات لها ضلعين باللون نفسه، كما مثل آخرون مثلثاتٍ لها أضلاع بألوان مختلفة، وهناك مجموعة مِن الطلاب كانت أشكال مثلثاتهم منوعة بين الأنواع السابقة وهكذا...، وبعد الانتهاء مِن العمل، طلبت المعلمة مِن الطلاب عرض العمل في مجموعات صغيرة مكونة مِن ثلاثة طلاب، ثم وجَّهت النقاش إلى الصف كله، وطلبت مِن كل مجموعة أنْ تشرح وتصف ما توصلت إليه لبقية المجموعات الأخرى، وبعد انتهائهم مِن العرض طلبت من بقية المجموعات التحرُّك ومشاهدة ما تمَّ عمله، ثم ناقشتهم فيه، وهكذا تم توزيع الأدوار وتبادلها في كلِّ المجموعات.

وقد ظهر عمقُ المناقشات بين الطلاب أثناء مشاهدتهم لأعمال بقية المجموعات؛ حيث لاحظ الطلاب وجود مجموعاتٍ صممت مثلثات مطابقة لعملهم في اختيار اللون والطول، ومجموعات صممت مثلثات تتفق باللون وتختلف في الطول، وأخرى تنوع تصميم مثلثاتها في اللون والطول؛ حيث كانت المجموعات تناقش وتقارن عملها بعمل بقية المجموعات. وبعد الانتهاء مِن التعليقات طلبت المعلمة مِن المجموعات التي عملت مثلثات لأضلاعها اللون نفسه أنْ يصفوا مثلثاتهم؛ فأجاب الجميع بالآتي:

- أنَّ المثلثات التي لها أضلاع باللون نفسه لها الطول نفسه؟

وهنا علقت إحدى المجموعات بقولها: مع أنَّ لدينا مثلثات أضلاعها لها الطول نفسه، إلا أننا نلاحظ أنَّ المثلث الزهري أقصر مِن المثلث الأزرق. وهنا أكَّدت المعلمة على

الصفة الرئيسة للمثلثات التي لأضلاعها الطول نفسه بقولها:" مهما اختلفت الألوان، ما صفة المثلثات التي أضلعها الثلاثة لها اللون نفسه؟ فأجاب الطلاب جميعهم: "نلاحظ أنَّ أضلاع المثلثات التي لها اللون نفسه لها الطول نفسه". وهكذا أكملت المعلمة طرح الأسئلة مع بقية التصنيفات حتى أكمل الطلاب وصف أوضاع المثلث مِن حيث أطوال أضلاعه، ثم كتبت المعلمة القاعدة على السبورة، ووجهتهم للتعمق في القاعدة من خلال زيادة التدريبات. وهكذا كانت بقية المشاهدات؛ حيث كانت أغلب ممارسات المتعلمين فيها موجهة نحو اكتشاف الطالب لمعنى المفهوم الرياضي وقاعدته، ومفاهيمه الخاصة المرتبطة به، وتقويم ممارساته مِن خلال ملاحظة ممارسات الزملاء، ونقاشاتهم، ومقارنتها بممارساته، كما لخَّص الطلاب ما تم تعلمه على أنْ تتيح لهم المعلمة مناقشة تأملاتهم على تلك الممارسات.

*** الأنشطة الصفية الممارسة داخل الصف؛ لبناء المعرفة الرياضية لدى تلاميذ المرحلة الابتدائية:**

أظهرت نتائج الملاحظات الصفية والمقابلات أنَّ توزيع الأنشطة يتم وفق تسلسلِ الدرس؛ بحيث تتسلسل الأنشطة في الدروس للمحتوى الجديد على النحو الآتي:

- نشاطٌ فردي؛ وفيه يكتب الطلاب المشكلة في دفاترهم، ثم يقرؤون ما كتبوه؛ ليحددوا الكلمات المهمة بالنسبة لهم؛ كي يناقشوها مع المعلم، كما يطرح الطلاب في هذه المرحلة تأملاتهم.
- نشاطٌ جماعي للصف كله؛ يتم مِن خلاله إعادة قراءة المشكلة قراءةً جماعية، أو تكرار قانون، أو تلخيص الدرس تلخيصًا جماعيًا.
- نشاط للمجموعات الصغيرة؛ لبذل الجهد في مرحلة تطوير حلِّ المشكلة.

ويعدُّ تنوع الأنشطة الصفية وسيلةً مستخدمة؛ لبناء وتعميق المعرفة الرياضية؛ حيث تبدأ بالأنشطة الفردية؛ لتمكن الطالب مِن تحديد مستوى خبراته القبلية، ومفاهيمه الخاصة عما هو معروض أمامه، وتهيئته للمناقشات، والبحث عن إجابات لتساؤلاته مع مجموعته ومع المناقشات الصفية لبقية المجموعات، ثم يتم الانتقال إلى العمل في مجموعاتٍ صغيرة، ويبذل الجهد؛ لمحاولة إيجاد الحل

بطريقة المتعلمين الخاصة؛ حيث يتم التعلُّم مِن خلال الأقران. كما تعدُّ الكتابة والقراءة من الأنشطة الممارسَة بوضوح في الدروس اليابانية؛ حيث يستخدم المعلمون الكتابة والقراءة وسيلةً لحثِّ الطلاب على التفكير والتأمل والوعي بمعارفهم الحالية، والمعارف المطلوبة لحل المشكلة؛ لذا يستخدم المعلمون أساليب عدة لتوجيه طلابهم للكتابة والقراءة، ففي بداية الحصة يُوجَّه الطلاب لكتابة وقراءة المشكلة المعروضة في دفاترهم، كما يُوجَّهون لعرض معرفتهم على السبورة مع قراءتها وتوضيحها لزملائهم مِن خلال مفاهيم أو إجراءاتٍ أو حلول، لتكون أفكارهم واضحة ومرئية للجميع، وليسهل مناقشتها وتوضيحها وتصحيحها، بالإضافة إلى أنَّهم يُوجَّهون للكتابة في دفتر المعلم المعروض بالكاميرا الوثائقية خلال حل التدريبات، مع قراءة ما يكتبه ويسوغه. وغالبا ما تكون الحلول والكتابات بلغة الطلاب وطريقتهم الخاصة. كما يوجه الطلاب لتكرار الأداء، (مثل: إعادة قراءة قاعدة، أو إعادة الإجراءات عدة مرات متتالية إعادةً جماعية، أو إعادة تمثيل عملية رياضية باستخدام التمثيل المحسوس بقطع العد أو النماذج)، ويهدف هذا التكرار إلى تمكين مهارة الحفظ والاسترجاع لدى الطالب؛ لتمكين الإجراء لديه حتى يمارسه بعد ذلك ممارسةً لا واعية.

ويساعدهم في ذلك البيئة الصفية الغنية بالمعينات؛ حيث تحتوي على: سبورة ذكية، وسبورة خضراء مكونة مِن عدة أجزاء قابلة للسحب؛ للتوسيع أو التصغير، بالإضافة إلى كاميرا وثائقية في كلِّ فصل يستخدمها المعلمون عند عرض أنشطة الكتاب المدرسي، أو عند عرض إجابات الطلاب. ويتم تنظيم الصف على هيئة مجموعات، كلٌّ مجموعة مكونة مِن ثلاثة طلاب، باستثناء طلاب الصف الأول الابتدائي؛ إذ إنَّ كل مجموعة تتكون مِن طالبين، وتُرتَّب مقاعدهم ترتيبًا يمكنهم

مِن رؤية المعلم والسبورة بوضوح، بالإضافة إلى تمكين المعلم من رؤية طلابه جميعًا بكلِّ وضوح.

ومما سبق، ترى الباحثة أنَّ نتائج الدراسة التي أظهرتها الملاحظة الصفية والمقابلات عن الممارسات التدريسية لمعلمي الرياضيات اليابانيين بالمرحلة الابتدائية (عينة الدراسة) يتوافق مع ما ذكرته الدراسات والمشاريع الدولية؛ حيث حددت نتائجُ الدراسات السابقة ونتائجُ تحليل دراسات المقارنات الدولية، مثل:(دراسات الفيديو لاختبارات التوجهات الدولية (TIMSS, 1995, 1999)، ودراسة منظور المتعلم The Learner's Perspective Study (LPS)، ونتائج تحليل الاختبارات الدولية (TIMSS and PIRLS 2011, TIMSS, 2015) أنَّ الممارسات التدريسية للمعلمين اليابانيين_ ترتكز على مكونات رئيسة ثلاثة؛ هي: استخدام طريقة حلِّ المشكلة المنظم في التدريس، والمناقشات الصفية العميقة، واستخدام السبورة؛ حيث يتم تهيئة الفصول الدراسية اليابانية مِن خلال التخطيط والتنظيم الدقيق لتلك المكونات؛ إذ يتم عرض المعرفة الرياضية وفق تسلسلٍ ثقافيٍّ يبدأ المعلم فيه بطرح مشكلةٍ معقدة تثير التفكير، ثم يترك الطلاب يبذلون جهدهم في حلِّ المشكلة، ثم يقدم فيها الطلاب العديد من الأفكار والحلول، ثم يلخص المعلم استنتاجات الصف، وأخيراً يمارس الطلاب حلّ مشاكلٍ مماثلة (Stigler et al., 1999; Hiebert & Grouws, 2007; Schwartz et al., 2011). كذلك تتفق نتائج الدراسة الحالية في النموذج التدريسي الملاحظ على عينة الدراسة مع ما وصفه (Burghes & Robinson, 2009) مِن استخدام المعلمين للترجمة اليابانية لمصطلحات مراحل بوليا الأربعة لحلِّ المشكلات، كـ: إطار تصميم الدروس وتنفيذها؛ حيث يتم تنظيم وتقديم الدرس مِن خلال أربع مراحل متميزة: عرض المشكلة، وتطوير الحل، والتقدم مِن خلال المناقشة، وتلخيص الدرس. كما تتفق تلك النتائج مع ما ذكره (Ho & Hedberg, 2005) مِن أنَّ الدروس اليابانية تتضمن عدة إجراءات منها: التدريس الإرشادي، وتعليم المهارات والمفاهيم، والأنشطة الطلابية؛ حيث يتم في إجراءات التدريس الإرشادي: تقديم المعلم مشكلةً رياضية بكلمات مقسمة إلى أربع فئات فرعية تستند إلى خطوات بوليا، وهي: الفهم، والتخطيط، والتنفيذ،

والتأمل، وفي فئة تدريس المفاهيم والمهارات هناك ثلاثة أنواع: إعادة العمل أو حل مشاكل أخرى حلًا جيدًا، مع التركيز على الخطوات اللازمة لحل مشاكل الكلمات، والتحقق مِن الإجابة السريعة؛ أما بالنسبة لفئة الأنشطة الطلابية فهناك: عرض الطالب، والعمل الجماعي، والعمل الفردي مع مجموعة صغيرة.

كذلك تتفق نتائج الدراسة الخاصة بإدارة الحوار الصفي مع الدراسات التي وصفت المناقشة الصفية في اليابان بأنَّها مناقشات صفية مستفيضة تدعى: (نيرياج–Neriage) وتعني: التلميع، وتعدُّ هذه المناقشة قلب تعليم الرياضيات مِن خلال حل المشكلات، و تبدأ بعد انتهاء الطلاب مِن محاولاتهم لحل المشكلة الرياضية بطريقتهم وفهمهم الخاص، وتعدهم للمناقشة الصفية. ويتمثل دور المعلم خلالها بتنظيم الأفكار، والأساليب، والحلول التي يطرحها الطلاب، ومساعدتهم على تحسينها من أجل تعلُّم المحتوى الرياضي، وإبراز الأفكار والمفاهيم الرياضية المهمة بما يسهم في إنشاء علاقةٍ بين تعلمهم السابق والمحتوى الذي سيتعلمونه مِن خلال المناقشة المستفيضة؛ لتحقيق أهداف الدرس (Stigler & Hiebert, 1999; Koizumi, 2013). وتتفق النتائج في مرحلة التلخيص مع ما أظهرته نتائج دراسة (Shimizu, 2006) من أنَّ التلخيص نشاط رئيس في الفصول الدراسية اليابانية، وأنَّ أهم وظائفه: إبراز وتلخيص النقاط الرئيسية في الدرس، وتشجيع الطلاب على التفكير فيما حققوه، وتحديد السياق لإدخال مفهوم أو مصطلح رياضي جديد يعتمد على التجارب السابقة، وإجراء روابط بين الموضوع الحالي والسابق. كما تتفق نتائج الدراسة في استخدام السبورة في البيئة الصفية التي تسمى: (بانشو) مع ما ذكره (Burghes & Robinson, 2009) من أنَّ الفصول اليابانية مجهزة بسبورة كبيرة تستخدم لمساعدة الطلاب في تنظيم تفكيرهم واكتشاف أفكار جديدة، كما تعزز مهارات الطلاب في كتابة الملاحظات، وتذكرهم بما يحتاجون التفكير فيه.

وترى الباحثة أنَّ هذه الإجراءات التدريسية تنمِّي العمق المعرفي الرياضي؛ حيث ذكر كلٌّ مِن (Schwartz et al., 2011) أنَّ طرح المشكلة قبل عرض الدرس

يعمق المعرفة المفاهيمية والمعرفة الإجرائية، كما ذكر (Hiebert & Grouws, 2007) أنَّ ترك الطلاب للعمل بمفردهم يساعدهم على إبراز العلاقات المفاهيمية (صراحة)، وتطوير فهمهم، كما ذكر (Rittle-Johnson & Schneider, 2015) أنَّ تقديم مهامٍ للطلاب تتطلب طرح إجراءات مختلفة وصحيحة لحلِّ مشكلة ما، ومقارنتها، يُسهم في تصحيح مفاهيمهم الخاطئة، ويعمق معرفتهم الرياضية. ويرى (Canobi, 2009) أنَّ تشجيع الطلاب على التفسير الذاتي عند إتمام إجراءات الحل، مثل: شرح الأسباب التي جعلت الحلول صحيحة أو خاطئة تدعمُ المعرفة المفاهيمية والإجرائية.

ثانيا- الممارسات التدريسية؛ لبناء المعرفة الرياضية في دولة سنغافورة: تم توضيح تلك الممارسات كما أظهرتها الملاحظة الصفية والمقابلات غير المنتظمة وفق المحاورالفرعية:

النمط التدريسي: أظهرت نتائج الملاحظات الصفية أنَّ طريقة التدريس المتبعة لدى معلمي عينة الدراسة في عرض المعرفة الجديدة هي التدريس المباشر الموجه مِن قبل المعلم، و تمرُّ بعدة مراحل:

المرحلة الأولى: مرحلة عرض المعرفة المفاهيمية، والتدرُّج؛ لبناء المعرفة الإجرائية مِن خلالها، وفيها يُستخدم التدريس المباشر الموجه مِن قبل المعلم؛ حيث يقدم فيه المعرفة المفاهيمية أولا بعرضٍ متدرج يبدأ بالتمثيل التصويري وينتهي بالتمثيل المجرد، ويُعرض المفهوم بدايةً بأبسط حالة، ثم يتم التوسع ليشمل جميع حالاته؛ لتعميق المعرفة المفاهيمية، وتستغرق هذه المرحلة من 15–20 دقيقة مِن زمن الحصة، يعرض فيها المعلم 4–6 أنشطة تتناول جميع جوانب تعميق المفهوم، حيث يبدأ عرضها بنشاط: انظر وتعلم الذي يتضمَّن مجموعةً مِن المسائل اللفظية البسيطة، وفيه يقرأ المعلم النشاط، ويوجه طلابه لقراءته جماعيًا، ومِن ثم يحدِّد المعطيات والمطلوب بوضع خط عِّلى عبارات المسألة التي تمثلها، ومن ثم يتم ترجمة المسألة اللفظية وحلها إلى نموذج تصويري، مع توظيف الألوان؛ لتعميق المعنى،

وبعد التأكد مِن وضوح المعنى يُترجم الحل ترجمةً رمزية ولفظية، وبعدها يتم التوسع بعرض المفهوم وتتبع الإجراءات نفسها.

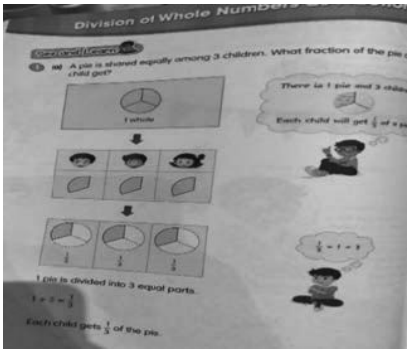
المرحلة الثانية: مرحلة التمكين: وفيها يعمل الطلاب عملًا فرديًا لتطبيق ما تم تعلمه؛ حيث تقدم لهم أوراق عمل بها عدد مِن التدريبات المباشرة لما تم تعلمه عدد 3–4 مِن الأنشطة، ويتابع المعلم إجاباتهم، ويقدم تغذيةً راجعة فاعلة تقديمًا فرديًا، وبعد التأكد مِن قدرة الطلاب على تطبيق المعرفة الإجرائية المبنية على المعرفة المفاهيمية، يناقش المعلم الحلول مناقشةً جماعية.

المرحلة الثالثة: تصحيح التصورات البديلة والأخطاء الشائعة: وفيها تُقدَّم الأنشطة التي تركز على تعميق المفاهيم التي قد تشكل تصوراتٍ بديلة أو أخطاءٍ شائعة لدى الطلاب، ويتم حل هذا النشاط مِن خلال استراتيجية (زاوج شارك)؛ حيث يطرح المعلم أوراق عمل بها عدد مِن الأنشطة 2 غالبا، وتستغرق من 10–15 دقيقة، ثم ينتهي بتقديم الواجب.

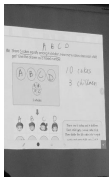
وقد أظهرت نتائج الملاحظات أنَّ الطلاب في العمليات الحسابية يستخدمون نمط العدد 10، كما أوضحت نتائج المقابلات مع المعلمين عنايتهم بتنمية الحس العددي لدى طلابهم، وقناعتهم بأنَّ العد المباشر لا يمكِّن الطلاب مِن تشكيل مفهوم العدد في ذهنه ولا ينمي التفكير الرياضي؛ لذلك فهم يشجعون طلابهم على استخدام الأنماط للعددين 5–10، كما يوظفون اليدويات المعينة في ذلك؛ ليكون لدى الطلاب المهارة في إيجاد الناتج مباشرة.

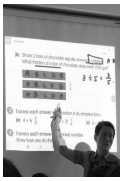
ويتَّضِحُ ذلك في المثال الآتي؛ في عرض المعلم لدرس (قسمة الأعداد الكلية ككسور) لطلاب الصف الخامس؛ الذي هدف إلى فهم الطلاب لمعنى القاسم والمقسوم عليه، وخارج القسمة والباقي، ويكون الناتج الكسري ذا معنى بالنسبة لهم؛ حيث عرض المعلم نشاط (انظر وتعلم) باستخدام الآيباد (جميع الدروس في الكتب محملة على الآيباد وتُعرض للطلاب بالتدريج مِن خلاله)، وبدأ بالمسألة الأولى في النشاط وقرأها، (وهي عبارة عن فطيرةٍ دائرية يراد توزيعها بالتساوي على ثلاثة أطفال، والمطلوب: تحديد الكسر مِن الفطيرة الذي يمثل نصيب كلِّ طفل)، ثم حدَّد المعطى

والمطلوب بوضع خطٍّ عليه، وطلب من الطلاب قراءة السؤال، ثم عرض نموذجًا تصويريًا للمسألة موضحًا في الصورة المجاورة؛ حيث عرض مفهوم العدد الكلي 1 بنموذج تصويري لدائرة تمثله، والجزء المراد منه، وناقشهم فيه؛ ليتضح مفهوم العدد الكلي وقسمته للأجزاء، ثم عرض نصيبَ كلِّ طفلٍ عرضًا منفصلًا عن الكل، وناقشهم فيه، ثم عرض صورةً تمثل موقع جزء كل طفل من الكل، وبعد أنْ اتضح للطلاب مفهوم الكل وقسمته بالتساوي على ثلاثة أطفال، حدَّد مع الطلاب قيمة الكسر الذي يمثل نصيب كل طالب، وشرح معنى بسط ومقام الكسر شرحًا تصويريًا، وفي ختام الحل تُرجم النموذج التصويري للحل إلى عبارة رمزية، ثم تُرجم الناتج إلى عبارة لفظية. وهذا التتابع توضحه الصورة السابقة.



وبعد عرض النشاط، انتقل المعلم للتوسع في عرض المفهوم؛ حيث زاد العدد الكلي مع الاحتفاظ بعدد المقسوم نفسه، وعرض مسألة قسمة فطيرتين على الأطفال الثلاثة نفسهم، وسأل: ما الكسر الذي يمثل نصيب كلٍّ منهم؟ ثم أعاد الخطوات السابقة نفسها بالعرض؛ حيث مثَّل العدد الكلي 2 بنموذجٍ تصويري ممثل بدائرتين؛ وذلك لتوضيح مفهوم العدد الكسري ثلثي العدد الكلي 2.





ويتَّضح مما سبق الحرص في مرحلة بناء المفهوم على استمرارية تتابع الأنشطة، مِن خلال تمثيل عدد الأجزاء المراد تقسيمها على الأطفال أنفسهم في جميع الأنشطة التي يتم فيها زيادة العدد الكلي، حتى يتحقَّق فهم الطلاب للتمثيل التصويري لمعنى العدد الكلي، ومفهوم تجزئته مِن قاسم ومقسوم وناتج قسمة، وهكذا يستمرُّ التدرج بزيادة العدد الكلي الذي يمثله بدوائر، وبعدها زيادة في عدد الأطفال المراد قسمة الفطائر عليهم، و ناتجها يمثِّل الكسر العددي؛ ليصل إلى توضيح معنى العدد الكسري مِن خلال قسمة العدد الكلي 5 على أربعة أطفال، وهنا تُوضَّح عملية القسمة باستخدام تمثيل الدوائر نفسها ونصيب كلِّ طفل بحصول كلٍّ منهم على وحدة كاملة ممثلة بدائرة، وجزء مِن دائرة يمثِّل الربع؛ ليتضح لهم معنى ناتج القسمة بشكل عدد كسري يمثل ناتجه واحداً وربع كما هو موضح في الصورة السابقة. ومما سبق يُلاحظ أنَّ المعلم يقدم درسه بعرض المعرفة الرياضية الجديدة بنفسه، وتكون مشاركة الطلاب في الإجابة على أسئلة المعلم، وتهدف إلى التأكد مِن وضوح المفهوم ووضوح الإجراءات. ومع تقدُّم الأنشطة يقلل المعلم مِن دوره ويترك الطلاب لتطبيق ما تعلموه مسبقا في كلِّ نشاط، ثم يوجه الطلاب باستخدام أوراق العمل؛ لحلِّ نشاط: امرح وتعلم في مجموعاتٍ صغيرة، ثم يوجههم لحلِّ نشاط: افعل وتعلم حلًّا فرديًا؛ وذلك لتمكين الطلاب من تطبيق المعرفة الإجرائية، ثم يتابع المعلم العمل، ويطلب منهم عرضه على السبورة على أنْ تناقشه بقية المجموعات، ثم يقدم لهم التغذية الراجعة المباشرة. وعادة يستغرق هذا قرابة 10–15 دقيقة، ومِن ثم يستخدم نشاط: (زاوج شارك) بصورة تفاعلية؛ لتعزيز استيعاب الطلاب واكتشاف المعرفة الإجرائية. وفي الختام يقدم تدريباتٍ للعمل تقديمًا فرديًا بهدف تدريب الطلاب لامتلاك المهارة في تنفيذ المعرفة الرياضية الجديدة، كما يستخدم أنشطة: زاوج شارك؛ لتقويم تعلم الطلاب، وتأمل ممارساتهم، وفهمها وفهم تفكيرهم وتفكير الآخرين، بالإضافة إلى استخدام أنشطةِ تقويمٍ ذاتي يستخدمها الطالب؛ لتقويم حله.

وأظهرت نتائج المقابلات أنَّ المعلمين يركزون على استيعاب طلابهم للمفاهيم المرتبطة بالمحتوى الرياضي أولا، ثم تمكنهم مِن المعرفة الإجرائية بعد ذلك؛ لذا يحرصون عند تقديم المحتوى الجديد التدرج في عرض المفهوم، وأنْ يتولى المعلم هذا

الأمر في التدريس مباشرة. كما أوضحوا أنَّ طريقة عرض الكتاب المدرسي للمفهوم وأنشطته تساعدهم تماما في التدريس، فهم يتدرجون بالعرض باستخدام طريقة (برونر) من النموذج المحسوس انتقالا إلى التصويري ووصولا إلى المجرد، الأمر الذي يساعدهم في تعميق المفهوم؛ حيث إنَّ الكتاب بُني بكلِّ أنشطته في ضوئه، وسوّغوا عدم استخدامهم للنماذج المحسوسة كقطع العد، والاكتفاء بالنموذج التصويري بحرصهم على استخدام التمثيلات المحسوسة لطلاب الصف الأول الابتدائي، وكذلك في بقية الصفوف حين يكون محتوى الدروس يُعرض لأول مرة ولا توجد خبرة سابقة للطلاب فيه؛ أما في الدروس التي تشكلت لدى الطلاب صورتها الذهنية تشكيلًا حسيًا فيكتفون بعرضها تصويريًا؛ أما الطلاب الذين يواجهون صعوبات فيتم تحويلهم لدروس التقوية، والتعامل معهم بالتدرج المطلوب.

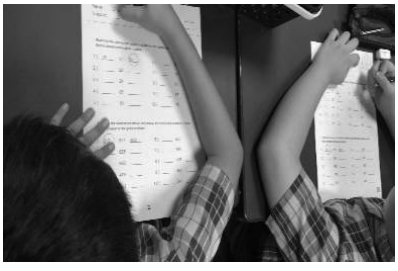
الممارسات التي يقوم بها المعلمون داخل الصف؛ لبناء المعرفة الرياضية لدى طلاب المرحلة الابتدائية:

أظهرت نتائج الملاحظات الصفية والمقابلات مع المعلمين أنَّ المعلم يكون مسيطراً على العملية التعليمية خلال مرحلة عرض المعرفة المفاهيمية وتعميقها، ويشارك الطلاب في هذه المرحلة من خلال طرح أسئلة موجهة، ويستخدم التمثيلات التصويرية، ويتدرج للوصول إلى التمثيل المجرد، ويساعده في ذلك وضوح وقوة عرض محتوى الكتاب المدرسي، ويقلُّ دور المعلم بعدَ عرض المفهوم؛ حيث يترك مساحةً لعمل الطلاب بمفردهم؛ للتأكد من استيعابهم، وتعميق فهمهم، مِن خلال تقديم التغذية الراجعة تقديمًا فرديًا قدر المستطاع، ويعطي مساحةً أكبر

للطلاب في اكتشاف المعرفة الإجرائية، ويكون متابعاً لهم ومستخدما تقويم الأقران. وقد أظهرت نتائج المقابلات أنَّ المعلمين لديهم معايير واضحة، وينتقون التدريبات والواجبات التي توضِّح مدى تحقق تلك المعايير، وتكون دالة لهم على تحقق فهم الطلاب للمعرفة الرياضية، حيث إنَّ هناك تركيزًا شديدًا مِن قبل إدارة المدرسة على ضرورة بلوغ جميع الطلاب حدَّ الاتقان المطلوب، كذلك أظهرت نتائجُ المقابلات أنَّه لا يوجد تصنيفٌ لأنشطة الطلاب ذوي المستوى المنخفض أو العالي أو المتوسط، لأنَّ المحتوى مُصمَّم ليحقق الطلاب مستوى الكفاءة المطلوبة؛ لذا إنْ وُجد طلاب لديهم صعوبات يتم تحويلهم لدروس التقوية، حيث أكدوا أنَّهم يعملون دوريًا للكشف عن مدى تحقق طلابهم لمعايير المحتوى المطلوب مِن خلال اختبارات دورية، ونتائج اختباراتهم الرسمية في نهاية كلِّ فصل.

كما فسَّر المعلمون للباحثة ما لاحظته في بداية كلِّ حصة مِن مراجعة المعلمين لبعض القواعد الرياضية مع طلابهم، مثل: ضرب الأعداد، أو قراءتها وهكذا...، في أنَّهم بهذا العمل يهدفون إلى جعل طلابهم مرتبطين باستمرار بالقواعد الرياضية الأساسية، مثل: جمع الأعداد، وضربها، وقواعد العمليات على الكسور؛ لذا يستغل المعلمون الدقائق الأولى ويقدمون أسئلةً أو أوراق عمل لذلك.

الممارسات التي يقوم بها المتعلمون داخل الصف؛ لبناء المعرفة الرياضية:



أظهرت نتائج الملاحظات الصفية والمقابلات أنَّه عند عرض المفاهيم يكون دور المتعلم متابعا لعرض المعلم، ومشاركا في الدرس مِن خلال الاستجابة لأسئلة المعلم المباشرة، وحلُّ الأنشطة مع المعلم على أوراقٍ بيضاء مغلفة ببلاستيك؛ ليسهل تعديل وتقويم حلهم وتصحيحه.

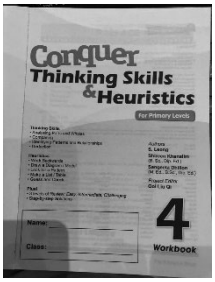
وفي مرحلةٍ التحقق مِن استيعابهم واكتشاف المعرفة الإجرائية يكون دورهم أكبر؛ حيث يعمل المتعلمون بصورة فرديةً وزوجيةً؛ لتعميق استيعابهم للمفاهيم.

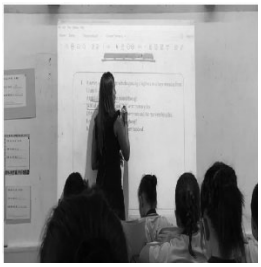
الأنشطة الصفية المستخدمة؛ لبناء المعرفة الرياضية لدى طلاب المرحلة الابتدائية:

أظهرت نتائج الملاحظة الصفية تنوُّع الأنشطة التي تُعرض على الطلاب؛ حيث تبدأ بنشاط: (انظر وتعلم) الذي يتولى إدارته المعلم، ويكون دور الطلاب النظر والتعلم مِن خلال الإجابة على أسئلة المعلم المباشرة، يليها نشاطٌ فردي: (افعل وتعلم) الذي يتم فيه تطبيق ما تم تعلمه، والتأكد من استيعاب التلميذ للمعرفة الرياضية، ثم نشاط: (زاوج شارك) الذي يهدف إلى مشاركة الطلاب لما فهموه، والتعرف إلى طريقة تفكير الآخرين، وتنمية التواصل الرياضي، بالإضافة إلى تصحيح الأخطاء والتصورات البديلة التي قد يقعون فيها.

وأظهرت نتائج الملاحظة الصفية أنَّ البيئة الصفية غنية؛ حيث يوجد بها سبورات بيضاء كبيرة، كما يوجد بها إنترنت يستخدمه المعلمون؛ لعرض المحتوى على السبورة الذكية باستخدام الآيباد، كما تُستخدم العديد مِن البرامج التعليمية التي تمكنهم مِن تفعيل التقويم باستخدام المسح الضوئي لإجابات طلابهم، بالإضافة إلى وجود كاميرا وثائقية في كلِّ صف، والعديد من الملصقات المثبتة على جانب السبورة ذات علاقة بمحتوى الوحدة التي يتم تعلمها. وترى الباحثة أنَّ هذه الأنشطة الصفية الداعمة تتوافق مع ما ذكره (Anthony & Walshaw, 2009) مِن أهمية تفعيل المتعلمين بوصفهم موارد تعليمية بعضهم لبعض؛ بحيث تتاح لهم فرص العمل إتاحةً مستقلة؛ لمساعدتهم على التفكير والعمل بهدوء، وأيضا العمل فرديًا أو تعاونيًا

في أزواج، بما يتيح لهم الفرصة ليكونوا مشاركين نشطين في مناقشةٍ هادفة مع الصف كاملا، ويتم فيها توضيح فهمهم، والتعرض لتفسيرات أوسع للأفكار الرياضية الأخرى المطروحة مِن زملائهم. كما ترى الباحثة أنَّ تنفيذ المعلمين (عينة الدراسة) لطريقة العرض المتدرجة مِن التمثيل التصويري إلى التمثيل المجرد تتوافق مع ما ذكره (Edge, 2006) مِن أنَّ وزارة التعليم بسنغافورة أكَّدت على ضرورة استخدام استراتيجية المحسوس التصويري التجريدي لتعليم الرياضيات (the CPA Concrete Pictorial Abstract Approach)؛ حيث يتم تقديم المفاهيم والمهارات الجديدة للطلاب مِن خلال استخدام العديد مِن اليدويات والنماذج وغيرها مِن الأنشطة العملية قبل الانتقال إلى الخوارزميات المجردة. كما تتفقُ نتائج الدراسة مَع ما ذكره (Leong, Ho & Cheng, 2015) بأنَّ المنهج التعليمي المشترك في فصول الرياضيات في سنغافورة هو التعليم المباشر لـ(المجرد) – القواعد، والرموز، والتقنيات ذات الأسئلة المحددة – دون البدء بالمحسوسات لبناء المفاهيم، وأنَّ التفاعل مع المعلم ينحصرُ في الإجابة عن أسئلةٍ بدأها المعلم، أو البحث عن تصنيفٍ من المعلم (Chang et al., 2001).





ومع أنَّ نظام تعليم الرياضيات في سنغافورة يؤكِّد على أنْ يكون حل المشكلات هو المركز الرئيس لتعليم الرياضيات إلا أنَّ الملاحظات الصفية لم تُظهر ذلك، وكان حلُّ المشكلات يُقدَّم بعد الانتهاء مِن المحتوى الدراسي كجانبٍ تكميلي؛ حيث طرحت إحدى المعلمات بعد شرحها لدرس التقريب لأقرب 10000 وبعد إجراء كافة مراحل نمط التدريس السابقة مشكلةً مِن كتاب مساند حيث يوجد لكلِّ فصلٍ دراسي كتاب طالب وكتاب النشاط، بالإضافة إلى كتاب خاص بمهارات

التفكير تهدفُ إلى تنمية مهارات التفكير، ثم وجهتهم إلى حل النشاط، وتعمقت معهم في المعطيات والمطلوب وإجراءات الحل. وهذه الملاحظة تتوافق مع ما ذكرته دراسة (Ho & Wong, 2015) مِن أنَّ التدريس هو العرض المباشر للمعرفة الرياضية، ولا يتم طرح حلِّ المشكلات إلا كجانب تكميلي.

مِن خلال ما سبق، أظهرت نتائج الدراسة أنَّ الممارسات التدريسية اللازمة؛ لبناء المعرفة الرياضية: (المفاهيمية والإجرائية) في ضوء التجارب الدولية اليابان وسنغافورة تظهر مِن خلال: العناية التامة بتقديم معرفةٍ رياضيةٍ مفاهيمية أولا، تكون دقيقة وذات معنى بالنسبة للمتعلمين، يتم عرضها بالتدرج والتوسع على أنْ يبدأ عرضها باستخدام التمثيل المحسوس، وصولا للتمثيل المجرد ليتم تشكيل تصور ذهني لها في عقول الطلاب، ولا تُقدَّم المعرفة الإجرائية إلا بعد وصول الطلاب لاستيعابٍ كاملٍ للمعرفة المفاهيمية اللازمة لها. كذلك تُظهر الدراسة العناية الشديدة باستخدام الأدوات البصرية؛ لتقديم المعرفة الرياضية؛ لمساعدة الطلاب في تخيل وتكوين صورة ذهنية للمفهوم، مع التدرج في استخدامها؛ للوصول للتمثيل المجرد بالرموز الرياضية لها؛ حيث يستفاد مِن الطريقة اليابانية التي أظهرت عنايةً كبيرة بالبدء بالتمثيل المحسوس لمدة أطول. كذلك أظهرت الدراسة ضرورة إتاحة الوقت الكافي الذي يحتاجه الطلاب؛ لاستيعاب المعارف التي تُقدم لهم، وقد ساعد كلتا الدولتين طريقةُ تنظيمهما للمحتوى الرياضي الذي يَعرض مفاهيمَ بعمقٍ أقلٍ وتركيزٍ أكثر؛ إذ يتم تقديمها وفق تسلسلٍ دقيق ومتدرج في أنشطة كلِّ درس بما يُسهم في توضيح وتعميق المعرفة الرياضية؛ بالإضافة إلى الاهتمام بتمكين الطلاب مِن ممارسة ما تعلموه ومناقشته مع الآخرين، وأنْ يكون لديهم الثقة فيما تعلموه، أو إذا كان هناك احتياج لمزيد مِن الفهم. ويمكن استخدام الأنشطة الصفية المتعددة والمتنوعة: أنشطة فردية وزوجية، وأنشطة تقويم ذاتي، وتقويم أقران؛ حيث يمكن الاستفادة من الطرق التي استخدمها معلمو الرياضيات في سنغافورة في كلِّ درسٍ؛ بهدف التحقق من عمق الاستيعاب المفاهيمي. كما يمكن تحقيق ذلك باستخدام الممارسات التدريسية التي استخدمها معلمو الرياضيات في اليابان مِن تشجيع للطلاب على طرح معارفهم الذاتية أولاً عما هوِ مقدم مِن معرفة رياضية،

ومناقشتهم في ذلك باستخدام عباراتهم نفسها بعد أنْ يصححها التلاميذ أنفسهم أو الزميل، الأمر الذي يزرع الثقة في نفوسهم، كذلك العناية بتوفير بيئةٍ صفية غنية بالتجهيزات، وثرية بما تحويه مِن مثيراتٍ بصرية ترتبطُ بمتطلبات المحتوى الرياضي، مع أهمية الاستخدام الواعي والدقيق للسبورة مِن خلال دقة تقسيمها، وتوزيع المحتوى عليها. وقد أظهرت الممارسات التدريسية في اليابان تفوقاً في هذا الأمر؛ حيث يعد استخدام السبورة مِن أساسيات عرض المحتوى العلمي.

ومِن الأمور المهمة والمتفق عليها في ممارسة كلتا الدولتين عنايتهما الفائقة باستخدام الاستراتيجيات المعينة؛ لتعزيز الحساب الذهني، والابتعاد عن العدِّ المباشر، والتعامل مع الأنماط العددية، وعنايتهم الفائقة بتنمية التفكير الرياضي مِن خلال التعمُّق بالمعرفة المفاهيمية، وسبل تعزيزها بالوسائل المعينة بما يحقق المهارة بالمعرفة الإجرائية. كما يتوافق تعليم الرياضيات في سنغافورة و اليابان في التركيز على ممارسة الطلاب للأنشطة الفردية في مرحلة عرض المفاهيم، أو في اكتشاف خبراتهم القبلية، وإنْ كان الوقت المستخدم في سنغافورة أطول؛ نظرا لاعتماده على نمطِ التدريس المباشر، كما تتوافق الممارسات في الدولتين على المناقشة الصفية للفصل ككل عند عرض التطبيقات وتعميقها؛ لاكتساب المهارة في الإجراءات. وترى الباحثة أنَّ تطبيق كلا النمطين التدريسين: التدريس المباشر الذي استخدمه معلمو الرياضيات في سنغافورة، أو التدريس وفق حلِّ المشكلة الذي استخدمه معلمو الرياضيات في اليابان، لهما أهميتهما في تعميق المعرفة الرياضية، وكلاهما يتطلبان إعداد محتوى رياضي يتوافق معها؛ حيث يتطلب النمط المباشر محتوى يقدِّم المعارف تقديمًا تدريجيًا ثم توسيعها؛ للوصول إلى حد الإتقان، بينما يتطلب نمط حل المشكلة الإعداد لمشكلة حياتية عميقة وتفاعلية تيسر اكتشاف الخبرات القبلية للطلاب، وتساعدهم على فرض الفروض، وتجريبها بما يحقق نمو المعرفة الرياضية نموًّا مركزًا وعميقًا.

التوصيات

مما سبق توصي الباحثة بأهمية العناية بتنمية المعرفة الرياضية لدى طلاب المرحلة الابتدائية وفق ما هو آت:

- تشجيع الممارسات التدريسية التفاعلية التي تُعنى ببناء المعرفة الرياضية المفاهيمية، مِن خلال أنشطةٍ تعليمية فردية تمكِّن المعلمين مِن اكتشاف معارف التلاميذ القبلية، وتصوراتهم البديلة، وتصحيحها بما ييسر بناء المعارف الجديدة بناءً سليمًا، مع النظر لأخطاء الطلاب كنقاط أساسية؛ لتعميق وبناء المعارف الرياضية.

- تعزيز الممارسات التدريسية التي تساعد الطلاب على تأمُّل تعلمهم، والتأكد مِن استيعابهم المفاهيمي، والتعرُّف إلى طرق تفكير الآخرين مِن خلال مناقشاتٍ زوجية وجماعية، وتشجيعهم على استخدام المناقشات الجادة فيما بينهم تشجيعًا تعاونيًا.

- حث الطلاب على استخدام الرياضيات الصحيحة والدقيقة المقروءة والمكتوبة، بما يزيد وعيهم بتفاصيل المعرفة الرياضية المقدمة إليهم.

- طرح الاستراتيجيات المعينة على استخدام الأنماط العددية، مع تعميق الحقائق الأساسية للعمليات الرياضية، بما يعزز الحساب الذهني والتقليل مِن استخدام العد المباشر.

- إتاحة الفرصة للطلاب بطرح حلولهم وتوضيحها، وتبرير استنتاجهم، مع تقدير جهودهم المنتجة، وتشجيعهم لتقدير أعمال الآخرين الجيدة.

- استخدام اليدويات والنماذج الملموسة في بناء المفاهيم، والتدرج في البناء المعرفي بدءًا بالمحسوسات والتمثيل التصويري، وصولا للتمثيل المجرد، وخاصة في السنوات الدراسية الأولى، ومع الطلاب الأقل قدرة، على أنْ ترتبط السياقات بتجارب الطلاب قدر الإمكان.

- إدارة بيئة صفية جاذبة تسمح للمعلم برؤية جميع الطلاب والتواصل معهم.

- تنظيم المحتوى بما ييسر تقديم المعارف الرياضية باستخدام النموذج الياباني وهو نموذج حلِّ المشكلة ذي المراحل الأربعة: عرض المشكلة، وتطوير الحل، والتقدم من خلال المناقشة، وتلخيص الدرس على أنْ يكون التركيز على تطبيق

المعرفة الرياضية، والمهارات، وطرق التفكير الرياضي إلى مواقف جديدة أو غير مألوفة.

المقترحات

في ضوء ما توصلت إليه نتائج الدراسة تقترح الدراسة إجراء مجموعة مِن الدراسات، مثل:

- دراسة بحثية لمقارنة الممارسات التدريسية في الدول المتقدمة الأخرى، كـ: الصين وكوريا.
- دراسة تحليلية للكتب الدراسية في تلك الدول؛ للتعرُّف إلى طرق عرض المعرفة الرياضية في المحتوى الرياضي.
- دراسة تحليلية لنتائج الاختبارات الدولية في عدة دورات سابقة لطلاب المملكة العربية السعودية، وتحديد الصعوبات التي يواجهها الطلاب، ومقارنتها بالممارسات التعليمية المتبعة في الصف.
- إجراء دراساتٍ تجريبية لفاعلية نهج حل المشكلة المنظم في رفع مستوى التحصيل الدراسي.
- تطبيق الدراسة على مراحل دراسية أخرى؛ للتعرُّف إلى المزيد مِن الممارسات التدريسية اللازمة؛ لبناء المعرفة الرياضية.

Teaching Practices Needed to Construct Mathematical Knowledge among Primary School Pupils in the light of International Experiences (Japan and Singapore)

Dr. Su'ad M. Al Ahmadi
College of Education - Imam Muhammad bin Saud Islamic University
K.S.A

Abstract

The study aims to explore the teaching practices needed to construct mathematical knowledge among primary stage students in the light of the international experiments (Japan and Singapore). The qualitative field approach (survey design) was used on the sample of the study consisting of 6 teachers of mathematics in the primary stage in each country.

Results of the open classroom observations and unstructured interviews with the sample of the study showed that the teaching style used in Japan is the approach of problem solving according to its stages: Introducing a life problem, developing the solution, progress through discussion, summarizing knowledge as reflected on practice. While the teaching pattern used in the study sample in Singapore was direct instruction. Results, also, showed that both countries focus in their teaching practices on building conceptual knowledge first and then adopting procedural knowledge, supported by the nature of the mathematical content, which presents fewer concepts with deeper and greater concentration. The study, also, showed more interest of the two countries' teachers in using representations to build mathematical concepts and deep gradation to form them in the minds of their students, where the presentation begins with the gradual from meaningful representation and transition to graphic representation access to the abstract representation of the concept and its symbolic expressions to make mathematics meaningful for their students.

Keywords: Teaching practices, Mathematical knowledge, International experiments.

المراجع

Anthony, G. & Walshaw, M. (2009). Effective Pedagogy in Mathematics. *Educational Practices Series, no. 19*. Brussels: International Bureau of Education.

Baroody, A. J.; Feil, Y., & Johnson, A. R. (2007). An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*, 115-131.

Burghes, D. & Robinson, D. (2009). *Lesson Study: Enhancing Mathematics Teaching and Learning*. Reading: CfBT Education Trust.

Blalock, J. T. (2011). *The impact of Singapore Math on student knowledge and enjoyment in mathematics* (Doctoral dissertation). Available from ProQuest Dissertations and Theses database. (UMI No. 3492479)

Canobi, K. H. (2009). Concept-procedure interactions in children's addition and subtraction. *Journal of Experimental Child Psychology, 102*, 131-149. doi: 10.1016/j.jecp.2008.07.008.

Chang, A. S. C.; Kaur, B.; Koay, P. L., & Lee, N. H. (2001). An exploratory analysis of current pedagogical practices in primary mathematics classrooms. *The NIE Researcher, 192*, 7-8.

Common Core State Standards Initiative (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.

Edge, D. (2006). Teaching and learning. In P.Y. Lee (Ed.), *Teaching Primary School Mathematics: A Resource Book* (pp. 29-46). Singapore: McGraw-Hill.

Haapasalo, L., & Kadijevich, D.J. (2000). Two types of mathematical knowledge and their relation. *Journal fur Mathematik-Didaktik*, 21(2), 139-157.

Hiebert, J., & Grouws, D. (2007). Effective teaching for the development of skill and conceptual understanding of number: What is most effective? Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. *Retrieved from http://www.nctm.org/Research-and-Advocacy/Research-Briefand-Clips/Effective-Instruction/.*

Hiebert, J. & Morris, A.K. (2012). ''Teaching, rather than teachers, as a path toward improving classroom instruction''. *Journal of Teacher Education, 63*(3), 92-102.

Ho, K. F., & Hedberg, J. G. (2005). Teachers' pedagogies and their impact on students' mathematical problem solving. *Journal of Mathematical Behavior, 24*(3-4), 238-252.

Ho, K. F., & Wong, K. (2015). Developing The Repertoire of Heuristics For Mathematical Problem Solving: PROJECT 1 Establishing baseline data for mathematical problem solving practices in Singapore schools. *Retrieved from https://www.researchgate.net/publication/265146155.*

Jerrima, J., & Vignoles, A. (2016). The link between East Asian 'mastery' teaching methods and English children's mathematics skills. *Economics of Education Review, 50*, 29-44.

Koizumi, Y. (2013). Similarities and differences in teachers' questioning in German and Japanese mathematics classrooms. *ZDM The International Journal on Mathematics Education,* 45, 47-59. http://dx.doi.org/10.1007/s11858-012-0482-2.

Leong, Y. H.; Ho, W. K. & Cheng, L. P. (2015). "Concrete-Pictorial-Abstract: Surveying its origins and charting its future". *The Mathematics Educator 2015*, 16*(1), 1-19.*

Fuson, K. C.; Kalchman, M. & Bransford, J. D. (2005). Mathematics understanding: An introduction. In M. S. Donovan & J. D. Bransford (Eds.), *How students learn mathematics in the classroom* (pp. 217- 256). Washington, DC: National Academies Press.

Ministry of Education (2012). *O-level teaching and learning syllabus*. Singapore: Author.

Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology (2008). Chugakko gakushu shido yoryo kaisetsu, sugaku-hen (Commentary to the curriculum guidelines for lower secondary school, mathematics). Tokyo: Kyoiku Shuppan.

Mullis, I. V. S.; Martin, M. O.; Foy, P., & Hooper, M. (2016). TIMSS 2015 international results in mathematics. TIMSS and PIRLS International

Study Center, Boston College. *http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/international-results/. Accessed January 2, 2018.*

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston, VA: Author.

OECD (2015). Education Policy Outlook: Japan, available at https://www.oecd.org/education/bycountry/japan/.

Rittle-Johnson, B., & Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. In R. C. Kadosh & A. Dowker (Eds.), *Oxford Handbook of Numerical Cognition* (pp. 1118-1134). Oxford, UK: Oxford University Press.

Rittle-Johnson, B.; Fyfe, E. R., & Loehr, A. M. (2016). Improving conceptual and procedural knowledge: The impact of instructional content within a mathematics lesson. *British Journal of Educational Psychology, 86*(4), 576-591.

Shimizu, Y. (2006). How do you conclude today's lesson? The form and functions of 'Matome' in mathematics lessons. In D. Clarke, J. Emanuelsson, E. Jablonka, & I. A. C. Mok (Eds.), *Making connections: Comparing mathematics classrooms around the world* (pp. 127-146). Rotterdam: Sense Publishers B.V

Schwartz, D. L.; Chase, C. C.; Chin, D. B., & Oppezzo, M. (2011). Practicing versus inventing with contrasting cases: the effects of telling first on learning and transfer. *Journal of Educational Psychology, 103*, 759-775. doi: 10.1037/a0025140.

Stigler, J. W.; Gonzales, P., Kawanaka, T.; Knoll, S., & Serrano, A. (1999). *The TIMSS Videotape Classroom Study: Methods and findings from an exploratory research project on eighth-grade mathematics instruction in Germany, Japan and the United States*. Washington, DC: U.S. Government Printing Office.

Stigler, J.W. & Hiebert, J. (1999). *The Teaching Gap*. New York: NY, Free Press.

Teong, S. K.; Hedberg, J. G.; Ho, K. F.; Lioe, L. T.; Tiong, J.; Wong, K. Y., & Fang, Y. P. (2009). Developing the repertoire of heuristics for mathematical problem solving: Project 1. *Final technical report for project CRP 1/04 JH.*

TIMSS (2003, 2007, 2011, 2015). Retrieved from*: https://timssandpirls.bc.edu/.*