تشخيص الأخطاء في خوارزميات حل أنظمة المعادلات لدى عينة مختارة من طلبة الصف العاشر في الأردن

د. يونس محمد اليونس
كلية العلوم التربوية – الجامعة الأردنية

الملخص

هدفت هذه الدراسة تعرّف نسبة طلبة الصف العاشر الذين يعانون من ضعف في خوارزميات حل أنظمة المعادلات، كما هدفت إلى الكشف عن أصناف الأخطاء التي يقع فيها الطلبة ونسبة الوقوع في كل صنف، وللتحقق من ذلك تم بناء اختبار تشخيصي مكون من ثلاث عشرة مفردة من نوع الإجابة المفتوحة. طُبق الاختبار على عينة من طلبة الصف العاشر بلغ عددهم (١٣٨) طالباً وطالبة(٧٠ طالباً و ٦٨ طالبة) أعطوا الوقت الكافي للإجابة. ثم صُححت أوراق الطلبة واستخرجت نسبة الطلبة الذين يعانون من ضعف في خوارزميات حل أنظمة المعادلات وكانت تساوي (٦٣٪). ولبيان ما إذا كان لهذه النسبة دلالة حُسب الإحصائي (χ^2) وكانت قيمته تساوي (٩,٣٩) وهي دالة إحصائياً عند (α = ٠,٠١). تبع ذلك تصنيف الأخطاء التي يقع فيها الطلبة واستخراج النسب المئوية لكل صنف من أصناف الأخطاء. وكشفت الدراسة عن خمسة أصناف رئيسة للأخطاء: أخطاء مفاهيمية، وأخطاء متعلقة بالتعميمات، وأخطاء متعلقة بالإجراءات، وصعوبات في اللغة الرياضية رغم صحة الحلول، وأخطاء في عدم الانتباه. وخلصت الدراسة إلى توصيات لكل من المعلم والطالب ومطوري المناهج والباحثين.

مقدمة:

رغم تأثر المناهج المدرسية بالتطوير التربوي يبقى موضوع الجبر كفرع من فروع الرياضيات، ركناً أساسيا وهاماً من أركان المعرفة الرياضية. إذ يؤكد برمبا، وآش، وآش، وروك (Brumbaugh, Ashe, Ashe, and Rock, 1997) على

أن هذه الأهمية تعود لاعتماد مجال واسع من الموضوعات والمهن عليه، وبالرغم من هذه الأهمية للجبر إلا أنه يعد من الموضوعات الصعبة، إذ يشير كاريفيو وناصر، ولوسن (Carifio and Nasser, 1990; Lawson, 1990) كما هو موثق في (Hatfield, Edwards, and Bitter, 1997) إلى أن صعوبة الجبر عند الطلبة تعود إلى كونه شيئين في واحد: إنه لغة تصف العلاقات والأنماط، بين العناصر وداخلها، وكذلك هو نظام مجرد له قواعده وتعريفاته. ويبين برمبا وأخرون (Brumbaugh et al., 1997) أن الصعوبات التي تواجه الطلبة في تعلم الجبر ربما تعود إلى تقديم كمية كبيرة من المفاهيم والمهارات الجبرية في وقت قصير، وهذا يعني أن الطلبة في المرحلة الابتدائية يقضون وقتاً طويلاً في إعادة تعلم موضوعات رياضية شتى مع تقديم قليل لمفاهيم جديدة، ثم يبدأ الطلبة بتعلم عدد كبير من المفاهيم الجبرية في وقت قصير، وهذا يساهم في إضافة صعوبة جديدة في تعلم الجبر مما يولد تعلماً خاطئاً لدى الطلبة في المفاهيم وربما سلوك استراتيجيات خاطئة. ويمكن ملاحظة الصعوبات التي يواجهها الطلبة في الجبر، من خلال أدائهم على المفاهيم والمهارات وحل المسألة، التي كشفت عنها عدة دراسات عربية وأجنبية ودولية. ومن بين الدراسات العربية التي تناولت الصعوبات التي يواجهها الطلبة في الجبر (الدويري، ١٩٨١ والريماوي، ١٩٩٠ والطيطي، ١٩٨٩ والفراج، ١٩٩٣ وصالح، ١٩٨٧). ومن الدراسات الأجنبية (Davis, 1979; Davis and Cooney, 1977; Janice, 1996; Laursen, 1978; Lindquist, 1989; Margulies, 1993; Martinez, 1988; Movshovitz and Zaslavsky 1987; Nicolas and Liora, 1994; Parish and Ludwig, 1994; Radatz, 1979; Sleeman, Kelly, Martinak, Ward and Moore, 1989; Steven, 1996; Whitcraft, 1980). بالإضافة إلى الدراسات الدولية؛ ومنها الدراسة الدولية الثالثة في الرياضيات والعلوم The Third International Mathematics and Science Study (TIMSS) التي أجرتها الرابطة الدولية لتقييم التحصيل التربوي (International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IER)) في العام الدراسي١٩٩٤/ ٩٥ ١٩على طلبة الصفين الرابع والثامن، وبلغ عدد الدول المشاركة في الصف الرابع

(١٧) دولة وفي الصف الثامن (٢٦) دولة. ثم أعيد تطبيق الاختبار (TIMSS-Repeated) بعد أربع سنوات في العام الدراسي٩٨/ ٩٩ على طلبة الصف الثامن، وبلغ عدد الدول المشاركة (٣٨) دولة من بينهما الأردن. وفيما يتعلق بالرياضيات اشتمل الاختبار على الموضوعات التالية (١) الكسور والحس بالأعداد، (٢) القياس، (٣) تمثيل وتحليل البيانات والاحتمالات، (٤) الهندسة، (٥) الجبر. وحُسبت علامات الاختبار الدولي على مقياس متدرج (من ١ إلى ١٠٠٠) بانحراف معياري يساوي(١٠٠)، ومتوسط حسابي يساوي (٥٠٠)، وكان متوسط أداء الطلبة العالمي على الاختبار الكلي(٤٨٧)، في حين بلغ متوسط أداء الطلبة الأردنيين(٤٢٨). وبصورة عامة جاء الأداء العام للطلبة الأردنيين ضعيفاً، إذ احتلت الأردن الرتبة (٣٢) من أصل (٣٨) دولة. وتبع الأردن دولة إيران، وإندونيسيا، وتشيلي، والفليبين، والمغرب، وجنوب أفريقيا على الترتيب. أما متوسط أداء الطلبة الأردنيين على الموضوعات الفرعية الخمسة السابقة التي اشتمل عليها الاختبار فكان (٤٣٢، ٤٣٨، ٤٣٦، ٤٤٩، ٤٣٩) على الترتيب. وكان ترتيب الأردن على الموضوعات الفرعية متقارباً، إذ احتل موضوعا القياس والهندسة الترتيب (٣١) من أصل (٣٨). في حين جاء الترتيب على الموضوعات الأخرى مطابقاً تماماً للأداء العام على الاختبار الكلي، أي (٣٢) من أصل (٣٨) (The National Center for Educational Statistics [NCES], 2000).

وركز البحث في الأخطاء الرياضية في بادئ الأمر على موضوعات في الحساب حيث ظهر من خلال دراسات عدة منها (Blando, Kelly, Schneider and Sleeman, 1989;Borasi, 1987; Brumfield and Bobby, 1985; Engelhardt, 1977; Radatz, 1979; Roberts, 1968; Sealey, 1985). ثم تطور إلى موضوعات متقدمة مثل الجبر. ففي دراسة مارتينز (Martinez, 1988) تم التوصل إلى قائمة بالأخطاء الشائعة عند طلبة المرحلة الثانوية والمتعلقة بالتعلم الخاطئ للحدود والعوامل الجبرية، وصعوبة التمييز بين الحد والعامل، بالإضافة إلى صعوبات في حل معادلات خطية في متغير واحد. كذلك أشار ديفس وكوني (Davis and Cooney, 1977) إلى أنواع عدة لأخطاء طلبة المرحلة الثانوية، عندما طلب منهم حل اثنتي عشرة معادلة خطية

في متغير واحد، ومن هذه الأخطاء: الاستعمال الخاطئ لقواعد العمليات الأربع (الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة) على الأعداد الجبرية السالبة والموجبة، وأخطاء حسابية على العمليات الأربعة، والاستخدام الخاطئ لخواص الإضافة وضرب المعادلة في عدد ثابت، والاستخدام الخاطئ للنظير الجمعي، والضربي. أما لورسن (Laursen, 1978) فقد أشار إلى بعض الأخطاء الأساسية، لدى طلبة السنة الأولى، في الجبر، ومنها ضعف الطلبة في التمييز بين الحد الجبري والعامل، وإساءة تطبيق بعض القواعد الجبرية. أما باريش ولودويج (Parish and Ludwig, 1994) فقد أجريا دراسة على طلبة الثانوية العامة والسنة الأولى في الجبر، وتوصلا إلى عدة أخطاء رياضية يرتكبها الطلبة، ومن بين الأخطاء ذات الصلة بالجبر عدم كتابة رمز المساواة عند حل المعادلات، والاستخراج الخاطئ للمربع الجبري والجذر التربيعي لحد أو مقدار جبري، وصعوبات في توظيف اللغة الرياضية، فمثلاً لا يدرك الطالب أن المتباينتين (س < ٣ و٣ < س) متكافئتان، وأخطاء في الاختصار، وسلوك طرق خاطئة في الحل، وإساءة تطبيق نظرية أو قاعدة رياضية.

كذلك أجرى موفشوفيتس وزاسلافسكي (Movshovitz and Zaslavsky, 1987) دراسة تحليلية لإجابات طلبة المرحلة الثانوية في الرياضيات، وخلصت الدراسة إلى ستة أصناف للأخطاء الرياضية، أما الأخطاء المرتبطة بالجبر فكانت ١) استعمال خاطئ للبيانات في المسائل الرياضية، ومن الأمثلة عليها نقل خاطئ لبعض المعلومات من الاختبار لورقة الإجابة، واستبدال القيمة العددية لمتغير بدلاً من الآخر، فمثلاً يعوض القيمة العددية للسرعة بدلاً من المسافة، وإهمال بعض البيانات الضرورية المعطاة في المسألة، وإضافة بيانات دخيلة للمسألة، ٢) تفسير خاطئ للغة، ويتضح ذلك عندما يترجم الطالب تعبيراً من اللغة العادية إلى اللغة الرياضية أو العكس، ٣) نظريات أو تعريفات معيبة (ناقصة)، فمثلاً يطبق الطالب نظرية في خارج ظروفها، ويطبق الطالب خاصية التوزيع لعلاقة أو اقتران لا تتوفر فيه هذه الخاصية، فمثلاً $(\sin(\alpha+b) = \sin\alpha + \sin b)$ إذ يعامل $\sin(\alpha+b)$ على أنه ثلاثة حدود $(\sin, \alpha, b)$، واستخدام توثيق خاطئ لتعريفات أو نظريات رياضية، فمثلاً يكتب مفكوك مربع فرق حدين هكذا

$(\alpha - b)^2 = \alpha^2 + 2\alpha b - b^2$، ٤) حل صحيح لا يوصل للهدف، فمثلاً عندما يطلب من الطالب التعبير عن n بدلالة i, r, R, E, حيث $i = \frac{nE}{nr+R}$ فإن حل الطالب النهائي $n = i\frac{nE}{nr+R}$ – رغم صحة النتيجة التي توصل إليها – لا تدل على أنه وصل إلى الهدف المنشود، لان الطالب لم يلاحظ n في الطرف الأيمن من المعادلة، ٥) أخطاء فنية مثل الأخطاء الحسابية ومعالجة الرموز الجبرية.

وأشارت دراسة وايتكرافت (Whitcraft, 1980) لعدة أخطاء شائعة في موضوع الجبر، لدى طلبة الصف التاسع، ومن أهمها - مرتبة حسب درجة شيوعها بين الطلبة- أخطاء متعلقة بالإشارات، وأخطاء في قراءة نص المسألة ونقله إلى دفتر الإجابة، إجراء عمليات غير صحيحة، وأخيراً ضعف في فهم الطلبة للحدود الجبرية.

ولقد كشفت دراسة ديفس (Davis, 1979) التي تناولت أخطاء طلبة مساقات الجبر، والهندسة، وحساب التفاضل والتكامل عن أهم الأخطاء الشائعة المرتبطة بالجبر، ومن هذه الأخطاء: أخطاء في قانون التوزيع، وأخطاء في التجميع، فمثلاً يربع الصيغة الجبرية $c\sqrt{(x-a)^2 + y^2}$ بصورة خاطئة هكذا $c^2(x-a)^2 + y^2$، متجاهلاً التجميع داخل الجذر، وأخطاء في تجميع الحدود المتشابهة. في حين ناقشت دراسة راديتز (Radatz, 1979) تصنيفات عدة للأخطاء الرياضية التي يواجهها الطلبة، ومن هذه الأخطاء، أخطاء متعلقة في المتطلبات السابقة، سواء كانت مفاهيمية أو مهاراتيه أو حقائقية، وأخطاء ناتجة عن ضعف في التركيز والانتباه (يُسميها بعضهم عشوائية أو عدم انتباه)، وأخطاء ناتجة عن التأثر بمهمة سابقة، فمثلاً إذا كانت المسألة السابقة تستخدم عملية الجمع فإن الطالب ربما يظل متأثراً بهذه العملية حتى ولو كانت المسألة الجديدة تحتاج في حلها لعملية الطرح، وأخطاء في تطبيق قواعد أو استراتيجية غير مناسبة.

وكذلك أجرى سليمان وآخرون (Sleeman et al., 1989) دراسة صنفوا فيها أخطاء الطلبة إلى صنفين، أحدهما متعلق بالأخطاء الجبرية، ومن هذه

الأخطاء: إضافة الطالب حداً ثابتاً للمتغير x ويظهر من خلال المثال التالي $(4x+3=7x)$، وقلب عملية القسمة، ويظهر من خلال المثال التالي $ax=b \rightarrow x=\frac{a}{b}$، وطرح معامل x من ثابت، ويتضح ذلك من خلال المثال الآتي $(ax=b \rightarrow 3x=b \rightarrow x=2)$، ويسقط x من المعادلة، ويتضح ذلك من خلال المثال التالي $3x+3+6x \rightarrow 3x+3=6 \rightarrow 3x=3 \rightarrow x=1$، ولا يغير إشارة x عندما يغير مكانها من جهة لأخرى.

ومن الدراسات العربية التي تناولت الأخطاء الرياضية وتصنيفاتها دراسة خليفة (١٩٨٣) لدى طلبة الرياضيات في كليات التربية، التي هدفت إلى تقصي الأخطاء الرياضية الشائعة عندهم، وتحديد أنماطها. صمم الباحث اختباراً في الرياضيات المدرسية تكون من ثلاثة أجزاء: الاختيار من متعدد، والصواب والخطأ، والتكميل. غطى هذا الاختبار المجموعات، والعلاقات، والاقترانات والرواسم. وتوصل الباحث إلى ثمانية أنماط من الأخطاء: أولها: الخلط والتداخل بين المعاني الرياضية المختلفة، ومن الأمثلة على هذا النمط، الخلط بين المفاهيم الرياضية، والخلط بين الرموز الرياضية، والخلط بين القوانين الرياضية، والخلط بين العمليات الرياضية. ثانيها: عدم الدقة في التعبير اللفظي عن جوانب التعلم المختلفة في الرياضيات، ومن الأمثلة على هذا النمط التعبير اللفظي الخاطئ عن كل من المفاهيم الرياضية، والقوانين الرياضية، والنظريات الهندسية. ثالثها: عدم تذكر جوانب التعلم في الرياضيات، ومن الأمثلة على هذا النمط عدم تذكر كل من المفاهيم الرياضية، والقوانين الرياضية، والعلاقات الرياضية، والنظريات الهندسية، والحقائق الهندسية. رابعها: عدم الدقة في التحويلات الرياضية، ومن الأمثلة على هذا النمط أخطاء في تحويل الصيغ اللفظية إلى صيغ رمزية، وأخطاء في التعبير عن عبارات لفظية بأشكال هندسية، وأخطاء في التعبير عن أشكال هندسية بعبارات لفظية. خامسها: عدم القدرة على التمييز، ومن الأمثلة على هذا النمط عدم تمييز كل من التعريف الصحيح للمفاهيم الرياضية، والصورة الصحيحة للقوانين الرياضية، والصورة الصحيحة للنظريات الهندسية. سادسها: عدم القدرة على إصدار الحكم الصحيح في أسئلة الصواب والخطأ. سابعها: صعوبات تعوق طبيعة التفكير الرياضي، ومن

الأمثلة على هذا النمط صعوبات تعوق طبيعة التفكير الرمزي، كالتعبير الرمزي الخاطئ عن المفاهيم والتعميمات الرياضية والصيغ اللفظية وتعميم حالات خاصة على حالات عامة، وصعوبات تعوق التفكير الهندسي، كتعميم حالات خاصة على حالات عامة وإعطاء حالات خاصة لحالات عامة وعدم الدقة في رسم الأشكال الهندسية. ثامنها: قصور في الفهم الرياضي، ومن الأمثلة على هذا النمط عدم إعطاء الشروط الكافية التي توضح المفهوم الرياضي، والخلط والتداخل بين المفاهيم والتعميمات المتعلقة بها، وعدم فهم كل من العمليات الرياضية، والخواص الأساسية للعمليات الرياضية وخطوات التفكير الكامنة وراء التعميمات الرياضية.

وأجرت أبو عميرة (١٩٩٥) دراسة هدفت إلى التعرف إلى مدى تمكّن معلمي رياضيات التعليم الثانوي من المفاهيم والمهارات الرياضية، وتحديد أنماط الأخطاء الرياضية التي يرتكبونها، حيث اشتقت مفردات الاختبار من كتب الرياضيات المدرسية في مصر، وتوصلت الباحثة إلى ثلاثة أنماط رئيسة من الأخطاء: أولها أخطاء المفاهيم الرياضية، واشتملت على أخطاء في تحديد المفهوم الوارد في المسألة (٧٥٪)، وأخطاء في طبيعة التفكير الرياضي (٦٠٪)، والخلط بين المفهوم والمهارة (٤٣٪)، والخلط بين معاني المفاهيم والقواعد (٤٠٪)، والخلط بين المساحة والمحيط (٢٥٪)، وثانيها أخطاء في المهارات الرياضية، واشتملت على أخطاء في مبررات خطوات الحل (٥٥٪)، وأخطاء في الترجمة إلى رموز (٥٠٪)، وأخطاء في تمثيل العلاقات الرياضية هندسياً (٤٨٪)، وأخطاء في تطبيقات التكامل (٣٥٪)، وأخطاء في التمثيل البياني للدوال المثلثية (٣٣٪)، وأخطاء في التحليل البياني للمتجهات (٣٣٪)، وأخطاء في قياس المتجهات (٢٨٪). ثالثها أخطاء في التعميمات الرياضية، واشتملت على أخطاء في مبررات خطوات البرهان (٥٨٪)، وأخطاء في خطوات برهان النظريات (٥٨٪)، وأخطاء في كتابة التعميمات السابقة (٥٨٪)، وأخطاء في برهان قوانين المثلثات (٥٨٪)، وأخطاء في مساحة قاعدة الهرم (٣٣٪)، وأخطاء في المساحة الجانبية للمخروط (٣٠٪)، وأخطاء في المساحة الكلية للمنشور(٢٥٪).

وتوصلت الريماوي (١٩٩٠) في دراستها التي أجريت على طلبة الصف العاشر، إلى أن هناك ضعفاً واضحاً في موضوعات جبرية، مثل ضرب المقادير الجبرية، وتحليلها إلى عواملها الأولية، وجمع وطرح الكسور الجبرية، وتبسيط العبارات الجبرية الكسرية، بالإضافة إلى ضعف في حل المتباينة الخطية في متغير واحد، وحل معادلات خطية بمتغيرين، والتعبير عن المسائل العملية بصورة رمزية، وكذلك حل المسائل التطبيقية الجبرية. واكتفت الباحثة بتحديد نقاط ضعف الطلبة دون محاولة تصنيف أخطائهم. في حين حاولت الطيطي (١٩٨٩) تحليل وتصنيف أخطاء طلبة الصف التاسع في حل المعادلات الرياضية. من أجل ذلك قامت الباحثة ببناء اختبار مكون من(١٢) مفردة من نوع الإجابة المفتوحة، وطبقته على عينة مكونة من (٤١٧) طالباً وطالبة من مدارس مدينة إربد. أظهرت نتائج الدراسة تدنياً في أداء طلبة الصف التاسع في حل المعادلات الرياضية. وتوصلت الباحثة إلى ستة أنواع رئيسة من الأخطاء في حل المعادلات الرياضية: وهي: ١) ضعف في المفاهيم والمهارات الأساسية، وبلغت نسبة الأخطاء في هذا النوع من مجموع الأخطاء (٤٦٪)، ٢) ضعف في التحليل وفك الأقواس، وبلغت نسبتها من مجموع الأخطاء التي ارتكبها الطلبة (١١,٨٪)، ٣) ضعف في استخدام القانون العام لحل المعادلات التربيعية، وبلغت نسبتها من مجموع الأخطاء التي ارتكبها الطلبة (٧,٨٪)، ٤) ضعف في كتابة مجموعة الحل، وبلغت نسبتها من مجموع الأخطاء التي ارتكبها الطلبة (٦,٨٪)، ٥) أخطاء التخمين (يعوض الطالب بأرقام مباشرة في المعادلة دون أن يتبع خطوات الحل)، وبلغت نسبتها من مجموع الأخطاء التي ارتكبها الطلبة (١٥,٣٪)، ٦) أخطاء عدم إتمام السؤال، أو أخطاء ليس لها تفسير، وبلغت نسبتها من مجموع الأخطاء (١٢,٣٪).

وأشارت منشورات المركز الوطني لتنمية الموارد البشرية، فيما يتعلق بالدراسة الدولية الثالثة، التي أعيد تطبيقها في العام الدراسي ٩٨/٩٩، على طلبة الصف الثامن (TIMSS-R) إلى أن حجم عينة الدراسة المطبقة في الأردن كان مساوياً (١٤٧) مدرسة من المدارس التي تحوي الصف الثامن، تم اختيارها

عشوائياً من مجتمع الدراسة الذي تكون من مدارس وزارة التربية والتعليم، ومدارس وكالة الغوث الدولية، بالإضافة إلى مدارس التعليم الخاص، التي تحوي الصف الثامن. وبلغ عدد الطلبة المشاركين في الدراسة(٥٣٠٠) طالباً وطالبة. وكشف التقرير العام لنتائج الطلبة الأردنيين عن قصور واضح في إجاباتهم على الاختبار بشكل عام. كذلك تبين من خلال المنشورات أن نسبة الطلبة الذين أخفقوا في حل الأسئلة ذات الإجابة المفتوحة بلغت(٧٥٪)، وكانت أخطاؤهم كما وردت في التقرير موزعة في فئات أربع: أخطاء محددة تشتمل على خلل معين في معرفة الطالب الرياضية وقد يكون في تعلم مفهوم، أو إجراء خوارزمية، أو حل مسألة (١٥,٢٪) موزعة على المفاهيم، والإجراءات، وحل المسألة (٢٦,٢٪، ١٦,٤٪، ١٣,٦٪) على الترتيب، و ٢) أخطاء غير محددة تتمثل في وجود إجابات لا علاقة لها بالسؤال، أو إجابات مشطوبة، أو غير مقروءة (٤٥,٦٪) موزعة على المفاهيم، والإجراءات، وحل المسألة (١٩,٦٪، ٤٥٪، ٤٨,٥٪) على الترتيب، و٣) أخطاء عدم وصول حين لا توجد إجابة للطالب على المفردة رغم محاولته الإجابة عليها، وبالتالي لم يصل إلى حل أو قرار (١,٨٪) موزعة على المفاهيم، والإجراءات، وحل المسالة (٠,٠٣٪، ١,٢٪. ٢,١٪) على الترتيب، و٤) أخطاء عدم المحاولة أي أن الطالب لم يبدِ سلوكاً باتجاه حل المشكلة أو التعامل معها واكتفى بترك السؤال (١٢,٢٪) موزعة على المفاهيم، والإجراءات، وحل المسألة (٨،٤٪، ٦،٨٪، ٥،١٤٪)على الترتيب. يتضح أن مجموع النسب المئوية الموزعة على فئات الأخطاء الأربع السابقة يقل بمقدار عشرين عن(٧٥٪)، وربما يعود ذلك للتقريب العشري للنسب. أما فيما يتعلق بالنسب المئوية للطلبة الذين ارتكبوا أخطاءً في موضوع الجبر موزعة على الفئات الأربع السابقة فكانت (١٧,٥٪، ٤١,٧٪، ١,٩٪، ١٥,٥٪)، على الترتيب (المركز الوطني لتنمية الموارد البشرية، ٢٠٠٢). يتضح من نسب الأخطاء التي ارتكبها الطلبة في موضوع الجبر، أن أعلى هذه النسب كانت من فئة الأخطاء غير المحددة، وأن ارتفاع نسبة الأخطاء غير المحددة ربما يؤكد وجود صعوبات لدى الطلبة في موضوع الجبر.

يتضح بصورة عامة من خلال ما تم عرضه من الدراسات السابقة أن هناك نتائج مشتركة بين بعض الدراسات التي تناولت موضوعات رياضية متشابهة، فمثلاً اتفقت نتائج دراسة لورسن ومارتينز وسليمان وآخرون (Laursen, 1978; Martinez, 1988; Sleeman et al., 1989) في وجود صعوبة في فهم وتمييز الحد الجبري والعامل الجبري. إن أثر هذه الصعوبة قد يقود إلى سوء فهم، واستعمال خاطئ لمهارات وتعميمات لاحقة. كذلك اتفقت دراسات أخرى (Parish and Ludwig, 1994; Davis and Cooney, 1977; Davis, 1979; Whitcraft, 1980; Radatz, 1979; Movshovitz and Zaslavsky, 1987) في وجود صعوبات لدى الطلبة في سوء استخدام، وتطبيق تعميمات رياضية. كذلك اتفقت نتائج دراسات (الريماوي، ١٩٩٠ والطيطي، ١٩٨٩) في وجود ضعف وأخطاء عند الطلبة في حل المعادلات، والتحليل إلى العوامل، كما اتفقت النتائج التي عُرضت في تقرير مركز الموارد البشرية، مع (الريماوي، ١٩٩٠ والطيطي، ١٩٨٩) في تدني مستوى الأداء في الرياضيات في حل المعادلات الجبرية.

من الملاحظ أن أخطاء الطلبة في الرياضيات ليست دائماً وليدة الصدفة أو الإهمال أو عدم الانتباه، وإنما نتيجة خبرات سابقة في الرياضيات المدرسية، ويمكن تحديد أسبابها التي غالباً ما تكون نظامية، وأن هذه الأخطاء تستمر مع الطالب ما لم تعالج؛ (Radatz, 1980). ولمعالجة الصعوبات التي يواجهها الطلبة في موضوع الجبر، تبرز الحاجة للاستفادة من تشخيص وتحديد أخطائهم، من أجل تحسين عملية التدريس. ويؤكد راديتز (Radatz, 1979) أن تشخيص الأخطاء وطبيعة الأسباب المتعلقة بها تساهم في تكامل معرفة المعلمين بمحتوى المنهاج وتفريد التعليم والفروق الفردية بين طلبتهم. وهذا يتفق مع جانيه (Gagne, 1992)؛ إذ يرى أنه من أجل حدوث التعلم يجب الانتباه لمتطلباته السابقة والتأكد من استعداد الطالب للتعلم الجديد، بتفحص هذه المتطلبات التي تساهم في سلسلة التعلم وبالتالي تقود إلى فرص نجاح أكثر. وتؤكد دراسة (Klaner and Rule, 1985) على أن بناء المادة الدراسية بشكل متسلسل من خلال

الربط بين المعرفة الموجودة عند الطلبة، والموضوعات الجديدة ليست دائماً خطوة سهلة، لذلك لا بد للمعلم من الاستفادة من الأخطاء التي يرتكبها الطلبة وبعض نماذج أخطائهم التي ربما تهيئ فرصاً تعلمّية أفضل. وكذلك اقترحت الباحثتان عند تدريس موضوع الجبر القيام بالخطوتين الآتيتين: الأولى التفكير بالأخطاء التي يرتكبها الطلبة، ولماذا يقعون فيها، والثانية تقديم الموضوع باستدعاء المادة المتعلمة سابقاً والمرتبطة به.

كما يتضح من الدراسات السابقة أن بعضها تناول موضوعات رياضية واسعة المجال، كدراسة المركز الوطني لتنمية الموارد البشرية، ودراسة أبو عميرة، وبالتالي اتصفت أنماط الأخطاء المنبثقة عنها بالعمومية. في حين تناول بعضها موضوعات أكثر تحديداً، كدراسة ديفز وكوني (Davis and Cooney, 1977) في تحديد الأخطاء التي يقع فيها الطلبة، عند حل مجموعة من المعادلات الخطية في متغير واحد. كما لوحظ اقتصار معظم الدراسات، في تحديد أخطاء الطلبة على محاكمة حل الطلبة للأسئلة، ولم تحاول تقصي الأخطاء الناتجة من تتبع خطوات حل السؤال خطوة خطوة - كما حصل في الدراسة الحالية - للوصول إلى بدايات المعرفة الرياضية. لذلك يجيء تصنيف الأخطاء في الدراسة الحالية محاولة من الباحث للوصول إلى تصنيف وظيفي يرتبط بوحدة دراسية، ليسهل على المعلم عمل مراجعات للأخطاء ومناقشتها قبل تدريس الوحدة الدراسية، وليساعد في تطوير الكتب المدرسية ورسم الخطط العلاجية.

أهمية الدراسة

يتضح مما تقدم تعدد الأخطاء الشائعة في موضوعات الجبر في أوساط طلبة المرحلة الثانوية، وربما تعيق هذه الأخطاء عملية التعلم، وتؤدي إلى وجود صعوبات عندهم، قد تستمر سنوات، وأن هذه الصعوبات قد تسبب ضعفاً في متابعة موضوعات متقدمة، وبخاصة عندما تكون طبيعة المعرفة مبنية بشكل هرمي، مثل موضوع الجبر. وللعمل على إزالة هذه الصعوبات أو جعلها في حدها الأدنى تستدعي الحاجة الاستفادة من أخطاء الطلبة، إذ ترى بوراسي

(Borasi, 1987) أن أخطاء الطلبة قادرة على أن تكون أداة قوية لتشخيص صعوبات التعلم، كما إنها تزودنا بمعلومات قيمة عن الأسباب التي أدت للوقوع في الخطأ، وبالتالي تساعدنا في اقتراح الخطط العلاجية المناسبة. وحفّزت دراسة بوراسي كل من باريش ولودويج (Parish and Ludwig, 1994) إلى التوصية بضرورة استفادة المعلمين من تشخيص الأخطاء الرياضية لدى طلبتهم، بمزيد من البحث من أجل تقليل الشائع منها، وبالتالي تحسين تعلم وتعليم الرياضيات. وللاستفادة من أخطاء الطلبة تقتضي الحاجة تعريضهم لاختبار تشخيصي في موضوع محدد من موضوعات الجبر، من أجل تقصي نقاط الضعف عندهم، ولنجاح الاختبار التشخيصي في تحديد نقاط الضعف عندهم، يؤكد أشلوك (Ashlok, 1994) أن الاختبار يجب أن يمثل مدى محدوداً من المحتوى الدراسي.

مشكلة الدراسة

اقتصرت هذه الدراسة على كشف أخطاء طلبة الصف العاشر في حل أنظمة المعادلات، كموضوع فرعي من موضوعات الجبر، بالإضافة إلى تحديد نسبة الطلبة الذين يعانون من ضعف في خوارزميات حل أنظمة المعادلات، من خلال تعريض الطلبة لاختبار يحوي مجموعة من الأسئلة التي يطلب فيها من الطالب حل المعادلة أو أنظمة المعادلات، دون التعرض للتطبيقات العملية لتلك الأنظمة.

أسئلة الدراسة

تتلخص أسئلة الدراسة فيما يلي:-

١) هل تختلف نسبة طلبة الصف العاشر، الذين يعانون من ضعف في خوارزميات حل أنظمة المعادلات، عن ٥٠٪؟

٢) ما أصناف الأخطاء التي يقع فيها طلبة الصف العاشر عند حل أنظمة المعادلات، وما نسبها المئوية؟

محددات الدراسة

كان من محددات الدراسة عدم إمكانية اختيار المدارس عشوائياً، لأن طبيعة الاختبار تتطلب زمناً طويلاً للإجابة، مما جعل بعض المدارس تحجم عن المشاركة، وبالرغم من ذلك فقد تم اختيار الشعب من داخل المدارس عشوائياً، كذلك اقتصرت هذه الدراسة على خوارزميات حل أنظمة المعادلات، عند طلبة الصف العاشر، في منهاج الرياضيات، لدى وزارة التربية والتعليم في الأردن.

افتراضات الدراسة

افترضت هذه الدراسة أن جميع الأفراد الذين أجريت عليهم الدراسة قد درسوا وحدة حل أنظمة المعادلات، وتم التأكد من صحة هذا الافتراض قبل تطبيق الاختبار.

الطريقة والإجراءات

عينة الدراسة

تكونت عينة الدراسة من (٧٠) طالباً و(٦٨) طالبة من طلبة الصف العاشر، من ثلاث مدارس متعددة شعب الصف العاشر، من مدارس محافظة العاصمة في الأردن. إذ حاول الباحث اختيار عينة عشوائية، من مدارس حكومية ومدارس وكالة الغوث ومدارس التعليم الخاص، إلا انه لم يوفق في اختيار المدارس عشوائيا لمن القطاعات المذكورة لإحجام بعض المدارس وترددها في قبول تطبيق الاختبار التشخيصي. ومع ذلك فقد تم اختيار الشعب من داخل المدارس عشوائياً، إذ اشتملت عينة الدراسة على (٦٠) طالبة، من مدرسة حكومية للإناث، و(٤٦) طالباً، من مدرسة من مدارس وكالة الغوث، بالإضافة إلى (٨ طالبات و٢٤ طالباً) من مدرسة مختلطة من مدارس التعليم الخاص، حيث أبدت هذه المدارس تعاوناً في توفير الجو المناسب لتطبيق الاختبار

التشخيصي، ويتكون هذا الاختبار عادة من عدد كبير من المفردات في موضوع معين قياساً بالاختبار العادي، وبالتالي يتطلب وقتاً أطول لتطبيقه من الطلبة والمعلمين (Aiken, 1997).

أداة الدراسة

لتشخيص أداء الطلبة بفاعلية، يقترح هبكنز وآنتس (Hopkins and Ants, 1990)أن تُبنى مفردات الاختبار بحيث تعطي للطالب الفرصة للتعبير عن إجابته، بدلاً من أن يختار الإجابة من بين عدة إجابات معطاة. لاسيّما أن مفردات الاستجابة المفتوحة توفر بيانات غنية قد يساهم استثمارها في مساعدة التربويين وصانعي القرارات في تطوير المناهج وطرق التدريس. لذلك بعد مراجعة وحدة حل أنظمة المعادلات، في كل من كتاب الرياضيات ودليل المعلم للصف العاشر ومشروع منهاج الرياضيات للمرحلة الأساسية، تم تقسيم محتوى وحدة حل أنظمة المعادلات إلى ثمانية موضوعات فرعية؛ هي: حل المعادلات الخطية في متغير واحد، وحل المعادلات التربيعية في متغير واحد، وحل معادلات من الدرجة الثالثة والرابعة في متغير واحد، وحل نظام من المعادلات الخطية في متغيرين وثلاثة متغيرات، وحل نظام مكون من معادلة خطية ومعادلة تربيعية في متغيرين، وحل نظام مكون من معادلتين تربيعيتين في متغيرين. تبع ذلك كتابة مفردة على الأقل، لكل موضوع فرعي، من نوع الإجابة المفتوحة، تقيس قدرة الطالب على حل معادلة أو أنظمة من المعادلات، بالإضافة إلى قدرتها في الكشف عن الأخطاء التي يرتكبها الطلبة في خوارزميات حل أنظمة المعادلات.

وتكوّن الاختبار في صورته الأولية من تسع مفردات، وطُلب من الطلبة بيان خطوات الحل، وأعطوا الوقت الكافي للإجابة (١٣٥ دقيقة على جلستين بفاصل زمني قصير)، بعد ذلك تم عرض الاختبار في صورته الأولية على فريق من ذوي الاختصاص في الرياضيات وأساليب تدريسها يتكون من أربعة من المدرسين لمساقات أساليب الرياضيات والقياس والتقويم، وأربعة من المشرفين

التربويين، وخمسة من المعلمين الذين يدرسون الصف العاشر، حيث طُلب منهم بيان درجة مناسبة مفردات الاختبار للغرض الذي بُنيت من أجله. وبعد الأخذ بملاحظات فريق التحكيم، تم إخراج الاختبار في صورته النهائية، متضمناً مفردات مشتركة هدفت إلى تقصي الأخطاء الممكنة عند الطلبة، ليصبح عدد مفرداته ثلاث عشرة مفردة، موزعة كما يلي:-

الموضوعات	رقم المفردة
حل المعادلات الخطية في متغير واحد	١
حل المعادلات التربيعية في متغير واحد	٢، ٣
حل معادلات من الدرجة الثالثة في متغير واحد	٤، ٥
حل معادلات من الدرجة الرابعة في متغير واحد،	٦، ٧
حل نظام من المعادلات الخطية في متغيرين	٨
حل نظام من المعادلات الخطية في ثلاثة متغيرات	٩
حل نظام مكون من معادلة خطية ومعادلة تربيعية في متغيرين	١٠، ١١
حل نظام مكون من معادلتين تربيعيتين في متغيرين	١٢، ١٣

لذلك اعتبرت الإجراءات التي مر بها بناء الاختبار، دليلاً على صدق محتواه، كما حُسب معامل الثبات بعد إعادة تطبيق الاختبار على عينة من (٤٠) طالباً وطالبة، من مجتمع الدراسة، وبفاصل زمني مقداره ثلاثة أسابيع، وكانت قيمته تساوي (٠,٨٧)، وزيادة في التأكيد تم بناء صورة مكافئة للاختبار، وذلك بتكرار محتوى المفردات مع تغيير في معاملات المتغيرات في المعادلات، ثم حسب معامل ثبات التكافؤ على عينة مكونة من (٢٤) طالباً وطالبة، وبلغت قيمته (٠,٨٣).

النتائج ومناقشتها

للإجابة عن السؤال "هل تختلف نسبة الطلبة الذين يعانون من ضعف في خوارزميات حل أنظمة المعادلات عند طلبة الصف العاشر عن (٥٠٪)؟". صُححت أوراق الطلبة حيث استأنس بآراء المحكمين في توزيع العلامات على

أسئلة الاختبار، وعلى خطوات حل كل سؤال حسب أهمية الخطوة، حيث كانت العلامة الكلية للاختبار (٦٠)، كما اعتبر المحكمون أن الطالب يعاني من ضعف في خوارزميات حل أنظمة المعادلات إذا كانت علامته على الاختبار الكلي أقل من ٣٣ (٥٥٪) (إذ تمثل هذه النسبة متوسط تقديرات المحكمين للحد الأدنى للأداء المقبول على الاختبار التشخيصي). بعد ذلك حُسب عدد الطلبة الذين حصلوا على علامة تقل عن (٣٣) على الاختبار الكلي وكان عددهم يساوي (٨٧) طالباً وطالبة من أصل (١٣٨) أي بنسبة (٦٣٪). ولبيان ما إذا كان لهذه النسبة دلالة إحصائية حُسب الإحصائي (χ^2) للإجابة عن السؤال "هل تختلف نسبة طلبة الصف العاشر الذين يعانون من ضعف في خوارزميات حل أنظمة المعادلات عن (٥٠٪)" وكانت قيمته تساوي (٩,٣٩) وهي دالة إحصائياً عند ($\alpha = .01$). لذلك رفضت الفرضية الصفرية. وهذا يعنى أن نسبة الطلبة الذين يعانون من ضعف في خوارزميات حل أنظمة المعادلات تختلف عن (٥٠٪). من الملاحظ أن نسبة الطلبة الذين يعانون من ضعف في خوارزميات حل أنظمة المعادلات كانت أعلى من (٥٠٪). وقد يعود سبب ذلك الارتفاع إلى أن تعليمات النجاح والإكمال والرسوب المعمول بها في وزارة التربية والتعليم في الأردن تمنع رسوب الطلبة في الصف العاشر ليتسنى للضعاف منهم وغير الطموحين الالتحاق في تخصصات غير أكاديمية مثل الحرفي والزراعي والتمريضي والفندقي والتجميل (وزارة التربية والتعليم، ٢٠٠١).

وللإجابة عن السؤال الثاني، الذي هدف إلى الكشف عن أخطاء طلبة الصف العاشر في خوارزميات حل أنظمة المعادلات، وتبويب هذه الأخطاء في أصناف رئيسه، وتحديد النسبة المئوية للطلبة الذين يقعون في الخطأ، تمت مراجعة (٢٠) ورقة إجابة، بغرض وضع تصنيف أولي (عناوين رئيسة) للأخطاء، ثم تبع ذلك، وضع جدول يحوي رقم الطالب والأخطاء التي يقع فيها على الأسئلة من ١-١٣ في الاختبار المعد، بعد ذلك بدأت عملية رصد الأخطاء لجميع الطلبة، وعند التعرض لخطأ جديد لم يرد ضمن التصنيف الأولي في الجدول يتم

إضافة عنوان جديد لذلك. واستمرت عملية رصد الأخطاء وإضافة عناوين جديدة للأخطاء حتى اكتملت قائمة الطلبة. وأثناء عملية التحليل، روعي الأمران التاليان:-

١) في حالة وقوع الطالب في الخطأ في أحد الأسئلة، ثم تعرض للموقف نفسه أو مشابه له دون أن يخطئ، اعتبر الخطأ الأول راجعاً لعدم الانتباه، فمثلاً إذا أخطأ الطالب بإجابة ٤ × ٤ = ٨، ثم تعرض لموقف مشابه، ولأكثر من مرة، مثل ٥ × ٥ = ٢٥، فان الخطأ الذي وقع فيه أُعتبر خطأ عدم انتباه.

٢) في حالة وقوع الطالب في الخطأ، يتم تتبع إجراءات حل المعادلة في تكملة الحل بحثاً عن أخطاء أخرى، وتولّد من خلال ذلك أخطاء إضافية أثرت الدراسة.

وبعد الانتهاء من عملية رصد الأخطاء، حاول الباحث تصنيف الأخطاء التي يقع فيها الطلبة، حسب كل نظام من أنظمة المعادلات، إلا أن هذا التصنيف أدى إلى تداخل كبير في أخطاء الطلبة بين جميع أنظمة المعادلات، وبالتالي إلى تكرار في عرض الأخطاء تحت كل نظام من أنظمة المعادلات، وكان لهذا التداخل ما يبرره حيث أن طبيعة أنظمة المعادلات مترابطة، فمثلاً الأخطاء التي يقع فيها الطلبة عند حل معادلة خطية في متغير واحد تتكرر عند حل معادلتين خطيتين في متغيرين مع وجود بعض الأخطاء الجديدة، وهكذا بالنسبة لحل نظام مكون من ثلاث معادلات خطية في ثلاثة متغيرات، لذلك جرت محاولات عدة لوضع الأخطاء في تصنيفات رئيسة، تمخضت عنها الصورة النهائية التي جاءت في خمسة أصناف. تبع ذلك استخراج النسب المئوية لجميع أنواع الأخطاء التي وقع فيها الطلبة في كل صنف من الأصناف الخمسة. وهذه الأصناف هي:-

أولاً: الأخطاء المفاهيمية

ظهرت عدة أنواع من الأخطاء تحت هذا الصنف، والجدول رقم (١) يبين النسب المئوية والتكرارات والأمثلة على كل نوع من أنواع الأخطاء التي وقع فيها الطلبة.

جدول رقم (١)

النسب المئوية والتكرارات والأمثلة على كل نوع من أنواع الأخطاء المفاهيمية التي وقع فيها طلبة الصف العاشر في خوارزميات حل أنظمة المعادلات

الخطأ	أمثلة	**العدد	*النسبة المئوية
١) أخطاء متعلقة بالنظير الجمعي والضربي حيث يستخدم الطالب أياً منهما ليحل محل الآخر	مثال١: $8x=6 \rightarrow 8x-8=6-8 \rightarrow x=2$. تم إضافة النظير الجمعي للعدد ٨ بدلاً من الضرب بالنظير الضربي. مثال٢: $\frac{2}{3}x=4 \rightarrow \frac{-2}{3}.\frac{2}{3}x=4.\frac{-2}{3} \rightarrow x=\frac{-8}{3}$ تم الضرب بالنظير الجمعي للعدد $\frac{2}{3}$ بدلاً من الضرب بالنظير الضربي للعدد نفسه.	(١٩) (١٢٥)	٪١٥
٢)أخطاء متعلقة بالاستخدام الخاطئ لخاصية الإضافة وخاصية الضرب عند حل المعادلات. وتظهر من خلال			
أ-إضافة عددٍ لأحد طرفي المعادلة وعدم إضافته للطرف الآخر	مثال١: $4x-4=4 \rightarrow 4x-4+4=4 \rightarrow x=1$ مثال٢: $3x-6x-6=3 \rightarrow 3x-6x+6x-6=3 \rightarrow 3x-6=3 \rightarrow x=3$	(٢٢) (١٣٢)	٪١٧
ب -ضرب أحد طرفي المعادلة بعدد وعدم الضرب في الطرف الآخر	مثال: $4x1=0 \rightarrow 4x=-1 \rightarrow \frac{1}{4}.4x=-1 \rightarrow x=-1$	(٢٣) (١٣٠)	٪١٨
ج- ضرب طرفي المعادلة بعددين مختلفين	مثال١: $3x=-9 \rightarrow \frac{1}{3}.3x=\frac{1}{9}.-9 \rightarrow x=-1$ مثال٢: $2x^2=8 \rightarrow \frac{2x^2}{2}=\frac{8}{8} \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=1$ تم ضرب طرفي المعادلة بالنظير الضربي لمعامل المتغير، والنظير الضربي للحد الثابت	(٢١) (١٣٢)	٪١٦
٣) أخطاء متعلقة بجمع وطرح الحدود الجبرية وتظهر من خلال:			
أ) تجاهل معامل المتغير عندما يكون معامله العدد (١).	مثال: $x+3x+4x=7x$	(٢٧) (١٣٥)	٪٢٠

تابع الجدول رقم (١)

النسب المئوية والتكرارات والأمثلة على كل نوع من أنواع الأخطاء المفاهيمية التي وقع فيها طلبة الصف العاشر في خوارزميات حل أنظمة المعادلات.

الخطأ	أمثلة	**العدد	*النسبة المئوية
ب) طرح معامل حد جبري من ثابت	مثال: $6-2x=4x$	(٢٠) (١٣٦)	٪١٥
ج) جمع حدين مختلفين في الإشارة بشكل خاطئ	مثال١: $6x-2x=8x$ مثال٢: $3x-6x=-9x$	(٢٥) (١٣٤)	٪١٩
د) جمع متغير مع ثابت.	مثال: $6x+3=9x$	(٢٠) (١٣٦)	٪١٥
هـ) جمع خاطئ للحدود المتشابهة حيث يجمع أسسها عوضاً عن جمع معاملاتها.	مثال١: $3x^2+x^2=3x^4$ مثال٢: $x+3x+4x=7x^3$	(٢١) (١٣٢)	٪١٦
و) تجاهل توحيد المقامات في حالة الكسور.	مثال: $\frac{16x^2}{9}+x^2=25 \rightarrow \frac{17x^2}{9}=25$	(١٦) (٨٠)	٪٢٠
ز) جمع معاملات الحدود المختلفة.	مثال: $5xy$ أو $5y$ أو $3x+2y=5x$	(١٨) (١٢٠)	٪١٥
س) الخلط بين جمع وضرب الأسس (يقترض $x^n=nx$)	مثال: $x^2=2x$	(١٥) (١١٠)	٪١٤
٤) تحليل عبارة أولية.	مثال١: $x^2+4=(x-2)(x+2)$ مثال٢: $x^2+2=(x+2)(x+1)$	(٣٢) (١٣٥)	٪٢٤
٥) أخطاء متعلقة بعدم التمييز بين العامل في الحد الجبري والمقدار الجبري.	مثال١: $\frac{49-4.4.-2}{2.4}$ مثال٢: $\frac{2+5\sqrt{3}}{2}=1+5\sqrt{3}$ مثال٣: $5-5(3x-7)=10 \rightarrow 0(3x-7)=10$	(٢٧) (١٢٧)	٪٢١
٦) الخلط الخاطئ بين مفاهيم العمليات الحسابية	ومن الأمثلة على ذلك الخلط الخاطئ بين القسمة والطرح $\frac{4}{4}=0$، والخلط الخاطئ بين الطرح والضرب $13-3-1=13$، وكذلك الخلط الخاطئ بين القوة والضرب $8^2=16$.	(٢١) (١٣١)	٪١٦

* حُسبت النسب المئوية للأخطاء بقسمة عدد الطلبة الذين حاولوا الحل ووقعوا في الخطأ على عدد من حاولوا الحل.

** السطر الأول من كل خلية يمثل عدد الطلبة الذين وقعوا في الخطأ والسطر الثاني يمثل عدد الطلبة الذين حاولوا الحل.

يتضح من الجدول رقم (١) أن الأخطاء المفاهيمية الرئيسة التي وقع فيها الطلبة كانت أخطاء متعلقة بالنظير الجمعي والضربي حيث يستخدم الطالب أياً منهما ليحل محل لآخر، وأخطاء متعلقة بالاستخدام الخاطئ لخاصية الإضافة وخاصية الضرب عند حل المعادلات، وأخطاء متعلقة بجمع وطرح الحدود الجبرية، وأخطاء في تحليل عبارة أولية، وأخطاء متعلقة بعدم التمييز بين العامل في الحد الجبري والمقدار الجبري، والخلط الخاطئ بين مفاهيم العمليات الحسابية. وتراوحت نسبة الوقوع في الخطأ لدى طلبة العاشر بين ١٤٪ (يخلط الطالب بين جمع وضرب الأسس) و٢٤٪(يحلل الطالب العبارة الأولية).

ثانياً: أخطاء متعلقة بالتعميمات (قواعد، نظريات، نتائج)

ظهرت عدة أنواع من الأخطاء تحت هذا الصنف، والجدول رقم (٢) يبين النسب المئوية والتكرارات والأمثلة على كل نوع من أنواع الأخطاء التي وقع فيها الطلبة.

جدول رقم (٢)

النسب المئوية والتكرارات والأمثلة على كل نوع من أنواع الأخطاء المتعلقة بالتعميمات التي وقع فيها طلبة الصف العاشر في خوارزميات حل أنظمة المعادلات.

الخطأ	أمثلة	**العدد	*النسبة المئوية
١) تطبيق نظرية أو قانون خارج شروط تطبيقه.	مثال: يستخدم القانون العام لحل المعادلات التربيعية في حل معادلة من الدرجة الثالثة.	(٢٣) (١١٠)	٢١٪
٢) المبالغة في التعميم $xy=c$ فمهما كانت قيمة c فإن الطالب يطبق وفقاً لما يلي $xt=c \rightarrow x=c$ أو y=c	مثال: $x(x-4)=4 \rightarrow x=4,\ x-4=4$	(٣١) (١٢٥)	٢٥٪
٣) تطبيق خاصية التوزيع في أماكن غير صحيحة ويظهر ذلك من خلال:			
أ) توزيع الثابت (العامل) على حاصل ضرب عوامل الحد الجبري.	مثال١: $2(xy=8) \rightarrow 2x-2y=16$ مثال٢: $x(2x)=8 \rightarrow 2x-x^2=8$	(٢٤) (١١٥)	٢١٪

تابع الجدول رقم (٢)

النسب المئوية والتكرارات والأمثلة على كل نوع من أنواع الأخطاء المتعلقة بالتعميمات التي وقع فيها طلبة الصف العاشر في خوارزميات حل أنظمة المعادلات.

الخطأ	أمثلة	**العدد	*النسبة المئوية
ب) توزيع القوة في مربع فرق حدين على الحدين	مثال١ : $(2-x)^2 = 4 - x^2$ مثال٢ : $5(y-2)^2 = 5y^2 - 20$	(١٦) (٩١)	٪١٨
ج) استخراج الجذر التربيعي. حيث يوزع الجذر على مجموع أو فرق مربعين.	مثال١ : $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = x + y$ مثال٢ : $\sqrt{y^2-25} = y - 5$	(٢٣) (١٠١)	٪٢٣
٤) إيجاد الجذر الموجب لعدد وإهمال الجذر السالب أي $x^2 = a \rightarrow x = \sqrt{a}$	مثال : $y^2 = 9 \rightarrow y = 3$ وكذلك $x^2 = 1 \rightarrow x = 1$	(٤٢) (١٢٠)	٪٣٥
٥) استخدام خاطئ للتعميم الرياضي (يخطئ في استدعاء التعميم) ويظهر من خلال:			
أ) استدعاء خاطئ للقانون العام لحل المعادلات التربيعية في متغير واحد.	مثال: يكتب الطالب $x = \frac{b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ أو $x = b \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	(٢٩) (١٠٢)	٪٢٨
ب) استدعاء خاطئ لمفكوك مربع فرق حدين بتغيير في مواقع الإشارات.	مثال : $(x-y)^2 = x^2 + 2xy - y^2$	(١٠) (٩٠)	٪١١
ج) استدعاء خاطئ لتعميم رياضي.	مثال : $xy = 8 \rightarrow x = \frac{y}{8}$	(١٦) (٨٢)	٪٢٠

* حُسبت النسب المئوية للأخطاء بقسمة عدد الطلبة الذين حاولوا الحل ووقعوا في الخطأ على عدد من حاولوا الحل.

** السطر الأول من كل خلية يمثل عدد الطلبة الذين وقعوا في الخطأ والسطر الثاني يمثل عدد الطلبة الذين حاولوا الحل.

يتضح من الجدول رقم (٢)، أن الأخطاء الرئيسة المتعلقة بالتعميمات، التي وقع فيها الطلبة كانت: تطبيق نظرية أو قانون خارج ظروف تطبيقه، والمبالغة في استخدام التعميم $xy = c$ مهما كانت قيمة c فان $y = c$ أو

$xy = c \rightarrow x = c$، وتطبيق خاصية التوزيع في مواضع غير صحيحة، وإيجاد الجذر الموجب لعدد وإهمال الجذر السالب أي $x^2 = a \rightarrow x = \sqrt{a}$، واستخدام توثيق خاطئ للتعميم الرياضي (يخطئ في استدعاء التعميم)، وأن نسبة الوقوع في الأخطاء المتعلقة بالتعميمات، لدى طلبة العاشر تراوحت بين ١١٪ (يستدعي الطالب بصورة خاطئ مفكوك مربع فرق حدين بتغيير في مواقع الإشارات)، و٣٥٪ (يهمل الطالب الجذر السالب عند إيجاد جذور العدد).

ثالثاً الأخطاء المتعلقة بالإجراءات

ظهرت عدة أنواع من الأخطاء ضمن هذا الصنف، والجدول رقم (٣) يبين النسب المئوية والأمثلة على كل نوع من أنواع الأخطاء التي وقع فيها الطلبة.

جدول رقم (٣)

النسب المئوية والتكرارات والأمثلة على كل نوع من أنواع الأخطاء المتعلقة بالإجراءات التي وقع فيها طلبة الصف العاشر في خوارزميات حل أنظمة المعادلات

الخطأ	أمثلة	**العدد	*النسبة المئوية
١) التحليل وحل المعادلات:			
أ) الخلط بين التحليل إلى العوامل وحل المعادلة.	مثال: عند حل المعادلة يكتفي الطالب بالتحليل إلى العوامل فقط. $x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow (x-2)(x-2)$	(٢٩) (١٢٢)	٢٤٪
ب) معاملة العبارة التربيعية التي تشكل مربعاً كاملاً عند تحليلها على أنها فرق بين مربعين	مثال: $x^2 + 4x + 4 = (x-2)(x+2)$	(٢٩) (١١٥)	٢٥٪
ج) التعويض بصورة خاطئة في القانون العام	مثال: كأن يعوض قيمة معامل س٢ مكان قيمة معامل أو العكس	(١٤) (٩٨)	١٤٪
٢) خوارزمية معيبة:			
أ) عدم إدراك ضرورة التخلص من أحد المتغيرين عند حل نظام من المعادلات الخطية في متغيرين	مثال: $\binom{3x-y=2}{2x+2y=7} \rightarrow 5x + y = 9$ إذ يجمع الطالب الحدود المتشابهة بدلا من التخلص من أحد المتغيرين أو تعويض أحدهما مكان الآخر.	(٢٥) (١٢٩)	١٩٪

تابع الجدول رقم (٣)

النسب المئوية والتكرارات والأمثلة على كل نوع من أنواع الأخطاء المتعلقة بالإجراءات التي وقع فيها طلبة الصف العاشر في خوارزميات حل أنظمة المعادلات.

الخطأ	أمثلة	**العدد	*النسبة المئوية
ب) الحذف العشوائي لأحد المتغيرات عند حل نظام من المعادلات الخطية في ثلاثة متغيرات وبالتالي يقود إلى حل صحيح.	مثال: سؤال ٩ (الملحق رقم(١)) يحذف الطالب المتغير ص بجمع معادلة(١) و(٢) ثم يحذف المتغير ع بجمع المعادلة (٢) و(٣) فينتج معادلتين بثلاثة مجاهيل.	(٣١) (١٢٥)	٢٥٪
ج) إيجاد قيمة متغير عند حل نظام من المعادلات في متغيرين خطي أو تربيعي، ولا يجد قيمة المتغير الآخر.	مثال: سؤال ٨ (الملحق رقم(١)) يجد الطالب قيمة المتغير س ولم يجد قيمة المتغير ص.	(٢٢) (١٣٢)	١٧٪
د) عدم إكمال الخوارزمية رغم صحة الحل.	مثال١ : $x^3 + x = 0 \rightarrow x(x^2+1) = 0$ مثال٢ : $y^2 = 11$ يتبين أن الخوارزمية صحيحة ولكن لم توصل للهدف.	(٢٩) (١٣٠)	٢٢٪
هـ) يحل نظام من المعادلات يحوي متغيرين مفترضاً أحد المتغيرين يساوي صفراً.	مثال: ..... $\rightarrow \begin{pmatrix} x^2=10 \\ 9x^2=18 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x^2y^2=10 \\ 9x^2+y^2=18 \end{pmatrix}$	(٢٠) (١٢٥)	١٦٪
و) يقلب خوارزمية الطرح، أي عند طرح حدين متشابهين يطرح معامل الحد الأصغر من معامل الحد الأكبر بغض النظر عن قيمته.	مثال ١ : $16x^2 - 28x^2 = 12x^2$ مثال٢ : $x^2 - 9x^2 = 8x^2$	(٢٠) (١٢٨)	١٦٪

* حُسبت النسب المئوية للأخطاء بقسمة عدد الطلبة الذين حاولوا الحل ووقعوا في الخطأ على عدد من حاولوا الحل

** السطر الأول من كل خلية يمثل عدد الطلبة الذين وقعوا في الخطأ والسطر الثاني يمثل عدد الطلبة الذين حاولوا الحل

يتضح من الجدول رقم (٣)، أن الأخطاء الرئيسة المتعلقة بالإجراءات، التي وقع فيها الطلبة كانت أخطاء في التحليل وحل المعادلات، وخوارزمية

معيبة، وأن نسبة الوقوع في الأخطاء المتعلقة بالإجراءات لدى طلبة العاشر تراوحت بين ١١٪ (تعويض خاطئ في القانون العام)، و٢٥٪ (يحلل الطالب العبارة التربيعية التي تشكل مربعاً كاملاً على أنها فرق بين مربعين، وكذلك يحذف أحد المتغيرات عشوائيا عند حل نظام من المعادلات الخطية في ثلاثة متغيرات).

رابعاً: صعوبات في اللغة الرياضية رغم صحة الحلول

ظهر هذا الصنف من خلال: أ) عدم استخدام أدوات الربط الرياضية بين خطوات الحل، إذ بلغت النسبة المئوية للطلبة الذين وقعوا في هذا الخطأ (٢٦٪)، وكمثال على ذلك $x = 2 \; x^2 = 4 \; \frac{2x^2}{2} = \frac{8}{2}$. ب) عدم وضع إشارة المساواة عندما يحل الطالب معادلة، إذ بلغت النسبة المئوية للطلبة الذين وقعوا في الخطأ (٢٣٪) وكمثال على ذلك حل المعادلة التالية: $x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow (x-2)(x-2) \rightarrow x = 2$.

خامساً: أخطاء عدم انتباه

كانت نسبة الوقوع في هذا الصنف من الخطأ (١٨٪) وظهرت هذه الأخطاء عند نقل معادلة من مكانها إلى مكان آخر إذ كأن ينسى الطالب رقماً، أو يضع إشارة سالبة بدلاً من موجبة، وأيضاً عند استدعاء بعض الحقائق العددية مثل ٧×٨ =٥٤، وكذلك عند إجراء عمليات على الحدود الجبرية مثل $7x - 9x = 16x$.

إن ارتفاع نسبة الأخطاء التي يقع فيها الطلبة، يُعد مؤشراً على وجود مشكلة أو ضعف عندهم، كما أن عقد مقارنة بين النسب المئوية لأصناف الأخطاء ربما يكون عملاً غير مجدي، إذ ترى موفشوفيتس وزاسلافسكي (Movshovitz and Zaslavsky, 1987) أن إيجاد اختبار متوازن، يعطي الفرص المتساوية في الوقوع في كل صنف من أصناف الأخطاء، يعد تحدياً بحد ذاته. لذلك اكتفى الباحث بعرض النسب للقارئ دون إجراء مقارنات بينها.

يبدو واضحاً أن عدد الأخطاء التي توصلت لها هذه الدراسة كان كبيراً

وهاماً، إذ انسجمت معظم نتائج هذه الدراسة مع دراسات تناولت موضوعات مرتبطة بموضوع الدراسة الحالية، واتفقت نتائج هذه الدراسة مع نتائج دراسات سابقة تناولت جانباً من جوانب الدراسة الحالية، فمثلا فيما يتعلق بالأخطاء المفاهيمية، انسجمت نتائج الدراسة الحالية مع دراسات (Martinez, 1988; Laursen, 1978; Whitcraft, 1980) بوجود صعوبات في التمييز بين الحد الجبري والعامل الجبري، ومع دراسة (Sleeman et al., 1989) في إضافة حد لمتغير، وطرح عدد من معامل متغير، وكذلك مع دراسة (Davis and Cooney, 1977) في سوء استخدام النظير الجمعي والضربي، كذلك انسجمت بعض نتائج هذه الدراسة مع دراسات أخرى (Davis and Cooney, 1977; Movshovitz and Zaslavsky, 1987; Whitcraft, 1980; Sleeman et al., 1989; Radatz, 1979) فيما يتعلق بالعمليات الأربع على الأعداد الجبرية. أما فيما يتعلق بالتعميمات الرياضية فقد اتفقت نتائج هذه الدراسة مع (Movshovitz and Zaslavsky, 1987; Laursen, 1978; Davis, 1979; Parish and Ludwig, 1994; Laursen, 1978; Radatz, 1979; Sleeman et al., 1989) وظهر ذلك من خلال أخطاء في استخراج الجذر التربيعي وإيجاد مفكوك مربع مجموع أو فرق حدين، وقانون التوزيع. أما فيما يتعلق بأخطاء عدم الانتباه أو التركيز، فقد انسجمت نتائج هذه الدراسة مع دراسات (Movshovitz and Zaslavsky, 1987; Radatz, 1979; Whitcraft, 1980). في حين اتفقت نتائج هذه الدراسة مع دراسة (Parish and Ludwig, 1994) في وجود صعوبات في اللغة الرياضية رغم صحة الحلول، وعدم كتابة إشارة المساواة عند حل المعادلات. كذلك اتفقت نتائج الدراسة الحالية مع دراسة (مركز الموارد البشرية، ٢٠٠٢) ومع (الطيطي، ١٩٨٩ والريماوي، ١٩٩٠) بأن الأداء الرياضي كان متدنياً عند الطلبة في موضوعات الجبر. واتفقت نتائج الدراسة الحالية مع (الطيطي، ١٩٨٩) فيما يتعلق بوجود أخطاء في المفاهيم والمهارات الجبرية واستخدام القانون العام والتحليل إلى العوامل وفي وجود خوارزميات ناقصة، ولكن يصعب تحديد درجة الاتفاق على الموضوعات المذكورة، لأن في دراسة الطيطي تم حساب نسبة الأخطاء في كل نوع من بين

مجموع الأخطاء وليس نسبة الطلبة الذين وقعوا في الخطأ، وأخيراً اتفقت نتائج الدراسة الحالية فيما يتعلق بالأخطاء الخوارزمية المرتبطة بالتحليل وحل المعادلات، مع دراسات (Martinez, 1988; Movshovitz and Zaslavsky, 1987).

يتضح من تصنيف الأخطاء الناتجة من الدراسة الحالية أن هناك ضعفاً ملحوظاً في استيعاب الطلبة للمفاهيم الجبرية ومن أجل تعلم المفاهيم الجبرية تعلماً مبنياً على الفهم، يستحسن البدء بتدريسها عن طريق ربطها بما يمتلك الطالب من معرفة حسابية، كونها متطلباً سابقاً، والتدرج بطرح أمثلة، ونماذج تجسر ما بين الحساب (المحسوس)؛ والجبر (المجرد)، خاصة وأن المفاهيم الرياضية تعد اللبنة الأساسية للبناء الرياضي، إذ تعمل المفاهيم الرياضية كمتطلب سابق لتعلم التعميمات وفق أنماط التعلم عند جانييه، وأن إخفاق الطالب بتعلمها قد يقود إلى صعوبات في تعلم الخوارزميات والتعميمات الرياضية. وتتضح هذه الصعوبات من خلال ارتفاع النسب المئوية للوقوع في الخطأ، في كل من الجدولين رقم (٢)، ورقم (٣)، والمتعلقين في التعميمات الرياضية، والإجراءات، على الترتيب؛ إذ جاءت هذه النسب بصورة عامة أعلى من نسب الوقوع في الخطأ العائدة للمفاهيم الجبرية (أنظر جدول رقم ١).

وللتغلب على هذه الصعوبات، لا بد من إكساب الطلبة المهارة، وقاعدة التعميم، بعد التأكد من فهمهم واستيعابهم للمفاهيم المتضمنة فيهما، حتى لا تبدو عملاً آليا مملاً. كما أن ارتفاع نسب الأخطاء التي يقع فيها الطلبة على المهارات والتعميمات الرياضية ينسجم مع ما يشير إليه أبو زينه (١٩٩٤) بأن إخفاق الطلبة في تعلم المفاهيم والمهارات الرياضية سيعيق تعلمهم للرياضيات. ويعزي أبو زينة ضعف الطلبة فيهما لعدة أسباب؛ منها أن وسائل التعلم التي يستخدمها المعلمون في التدريس غير فاعلة ولا تثير دافعيّتهم نحو التعلم، ويقترح عدة استراتيجيات وتحركات لتدريس مكونات البنية الرياضية. ففيما يتعلق بالأخطاء الواردة في الدراسة الحالية، ولتصحيح تعلم الطالب للتعميم الخاطئ التالي الوارد في أصناف الأخطاء $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ يمكن للمعلم

استخدام المثال المعاكس بفرض $a = 4$ و$b = 3$، وبالتالي فإن ناتج الطرف الأيسر يساوي $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. أما ناتج الطرف الأيمن فيساوي٤+ ٣ = ٧ وينتج عن ذلك أن الطرف الأيمن لا يساوي الطرف الأيسر. كذلك يمكن الإفادة من استراتيجية (Margulies, 1993) لتخليص الطالب من أخطائه القائمة على الإعادة والعودة، كلما كان ذلك مناسباً، وأن يتوسع المعلم بشكل متكرر ولولبي، ويكثر من أمثلة عدم الانتماء للانتهاكات الشائعة للتعميمات الرياضية أثناء تدريس موضوع أنظمة المعادلات.

التوصيات

من خلال النتائج التي توصلت إليها الدراسة الحالية يمكن الخروج بعدد من التوصيات لكل من المعلمين والطلبة ومصممي المناهج والباحثين.

أولاً: بالنسبة للمعلمين:-

- تشخيص نقاط ضعف الطلبة يحفز المعلمين على تقديم برامج علاجية، تهيئ طلبتهم للتعلم الجديد، لا سيّما أن وقوع الطلبة في بعض الأخطاء يؤدي إلى وجود فجوات في تعلمهم، وأن هذه الفجوات قد تحبطهم وتجعلهم غير قادرين على متابعة ما يدور في العملية التعليمية – التعلمية.
- معرفة المعلمين بالأخطاء الشائعة عند طلبتهم في خوارزميات حل أنظمة المعادلات، يدفعهم للتأكيد على المتطلبات السابقة قبل البدء بتنفيذ الأهداف التدريسية، وبالتالي يمنحهم الفرصة لإعادة تشكيل عملية التدريس من خلال ترتيب موادهم التعليمية، وإثراء المحتوى بأنشطة ملائمة تحاكي الأخطاء الشائعة.
- تساعد معرفة الأخطاء الرياضية التي توصلت إليها الدراسة الحالية المعلمين في التنبؤ بالصعوبات والمعيقات التي تواجه طلبتهم وأخذها بعين الاعتبار عند عملية التخطيط للتدريس، وبالتالي ربما تساعد في منع حدوث قدر كبير من الأخطاء عند طلبتهم.

- بناء وحدات علاجية تناسب الطلبة كل حسب الصعوبات التي تواجهه يتطلب جهداً ووقتاً كبيرين. لذلك توفر نتائج الدراسة الحالية الوقت والجهد للمعلمين في تشخيص وتحليل أخطاء طلبتهم في خوارزميات حل أنظمة المعادلات.

- يُساهم معرفة الأخطاء التي توصلت إليها الدراسة الحالية في مساعدة المعلم في بناء اختباراته الموضوعية وذلك بجعل بدائل الفقرات من أخطاء الطلبة، حيث تزداد فاعلية البدائل كلما كانت مرتبطة بأخطاء الطلبة.

ثانياً: بالنسبة للطلبة:-

معرفة الطلبة بأخطائهم الشائعة ربما يدفعهم للتوصل إلى سبب الخطأ وكيفية التغلب عليه، لذلك فإن تعريضهم للخطأ، قبل الوقوع فيه، يقلل الوقت المقضي في إعادة تدريسهم إياه؛ من أجل حذفه أو التخلص منه. فمثلاً يمكن للمعلم قبل البدء بتدريس وحدة حل أنظمة المعادلات إعطاء كل طالب نسخة من الأخطاء، ثم الطلب منهم تصحيح هذه الأخطاء ومن ثم مراجعتها معهم، وربما يساهم ذلك في جعل الطلبة أكثر قدرة على تقليل أخطائهم.

ثالثاً: بالنسبة لمطوري المناهج:-

بالنسبة لمطوري المناهج المتعلقة بخوارزميات حل أنظمة المعادلات، وبالتحديد مصممي المحتوى الدراسي لوحدة أنظمة المعادلات، فإنهم يتوصلون من خلال ترتيبهم للمتطلبات السابقة للتعلم اللاحق إلى ترتيب المادة الدراسية، وإلى ضرورة توفير أنشطة ووسائل معينة وأمثلة تحوي بعض الأخطاء؛ من أجل تسهيل حذف، أو على الأقل، تقليل فرص الوقوع في الخطأ، فمثلا يمكن استخدام المثال المعاكس لإثبات عدم صحة التعميم الذي ظهر في الدراسة - مهما كانت قيمة c فان $y = c$ أو $xy = c \rightarrow x = c$ - بإعطاء أي عددين يختلفان عن

الصفر وتعويضهما في القاعدة المذكورة، فإن ذلك يساعد الطالب على اكتشاف خطئه، وكذلك ضرورة تأكيد التعميمات، والتحقق من الحل، واستخدام المواد الحسية لنمذجة بعض المفاهيم الجبرية الأساسية.

رابعاً: بالنسبة للباحثين:-

توصي الدراسة الباحثين بإجراء مزيد من الأبحاث لتشخيص الأخطاء التي يقع فيها الطلبة، في موضوعات الجبر الأخرى ولمراحل دراسية مختلفة؛ لتكوين صورة أشمل عن الأخطاء الشائعة، وبالتالي تقديم صورة متكاملة عن الأخطاء للمعلمين والطلاب ومصممي المنهاج. مما قد يساهم في تخفيض نسبة الوقوع في الخطأ عند الطلبة.

Diagnosing Errors in the Algorithms of Solving Linear Equation Systems for Selected Sample of 10th Graders in Jordan

Dr. Younes M. Alyounes
The Faculty of Educational Sciences - University of Jordan

Abstract

This study tries to determine the percentage of 10th graders in solving algebraic equations. It also aims at uncovering the error categories that 10th graders make and their percentage in each category in solving algebraic equations. To do so, a 13-item diagnostic test was developed. All items were open-ended and the students were asked to show all solution steps. The test was administered on a sample of 138 10th graders (70 males and 68 females) who were given enough time to finish the test. Students' papers were corrected and the percentage of students weak in solving algebraic equation were calculated. Their percentage was (63%) and the Chi-square value was found statistically significant ($\chi^2 = 9.39$) at ($\alpha = .01$). After that, students' errors were categorized and the percentage of their errors, for each category, were calculated. Student errors were classified into five main categories. They are conceptual errors, errors relevant to generalizations, errors relevant to procedures, difficulties in mathematics language, and errors relevant to lack of concentration (carelessness errors). Recommendations were made for teachers, students, curriculum developers and researchers.

المراجع العربية

١ - أبو عميرة، محبات (١٩٩٦). **الرياضيات التربوية: دراسات وبحوث**. القاهرة: مكتبة الدار العربية للكتاب.

٢ - أبو زينه، فريد (١٩٩٤). **الرياضيات: مناهجها وأصول تدريسها**. عمان: دار حنين.

٣ - الدويري، نايف (١٩٨١). مدى اكتساب طلبة المرحلة الإعدادية في الأردن للمفاهيم والمهارات الأساسية في الرياضيات. رسالة ماجستير غير منشورة، جامعة اليرموك، إربد، الأردن.

٤ - الريماوي، هالة (١٩٩٠). تشخيص الأداء الرياضي لدى طلبة الصفوف الإعدادية في اختبار متعدد المستويات. رسالة ماجستير غير منشورة، الجامعة الأردنية، عمان، الأردن.

٥ - الطيطي، هاشمية (١٩٨٩). تحليل أخطاء طلبة الصف الثالث الإعدادي قي حل المعادلات الرياضية. رسالة ماجستير غير منشورة، جامعة اليرموك، إربد، الأردن.

٦ - الفراج، ساره (١٩٩٣). مستوى إتقان طلبة المرحلة الثانوية للمهارات الرياضية في الأردن. رسالة ماجستير غير منشورة، جامعة اليرموك، اربد، الأردن.

٧ - المركز الوطني لتنمية الموارد البشرية (٢٠٠٢). **أدلة إرشادية لمعلمي الرياضيات لمعالجة أخطاء التعلم في ضوء أسئلة الدراسة الدولية الثالثة للرياضيات والعلوم**. عمان، الادن.

٨ - خليفة، عبد السميع (١٩٨٣). **بحوث في تدريس الرياضيات، المجلد الأول**. القاهرة: المطبعة الفنية الحديثة.

٩ - صالح، نبيل (١٩٨٧). المهارات الرياضية الأساسية في المرحلة الإعدادية:

واقعها وتنميتها. رسالة ماجستير غير منشورة، جامعة اليرموك، إربد، الأردن.

١٠- وزارة التربية والتعليم (١٩٨٩). **منهاج الرياضيات وخطوطه العريضة في مرحلة التعليم الأساسي**. عمان: جمعية عمال المطابع التعاونية.

١١- وزارة التربية والتعليم (٢٠٠١). **تعليمات النجاح والإكمال والرسوب**. مديرية الامتحانات، عمان، الأردن.

المراجع الأجنبية

12 - Aiken, L. R. (1997). **Psychological testing and measurement**, (9th ed.). Boston: Allyn and Bacon.

13 - Ashlock, R. B. (1994). **Error patterns in computations**, (6th ed.). NY: Macmillan Publishing Company.

14 - Blando, J. A.; Kelly, A. E. and S., B. and Sleeman, D. (1989). Analyzing and modeling arithmetic errors. **Journal for Research in Mathematics Education**, 20 (3), 301-308.

15 - Borasi, R. (1989). Students constructive uses mathematical errors: A taxonomy. Paper Presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Francisco, CA. (RRIC Document Reproduction service No. ED309069).

16 - Borasi, R. (1994). Capitalizing on errors as "springboards for inquiry": A teaching experiment. **Journal for Research in Mathematics Education**, 25 (2), 166-208.

17 - Brumbaugh, D. K., Ashe, D. E., Ashe, J. L., and Rock, D. (1997). **Teaching Secondary Mathematics**. Mahwan, N J: Lawrence Erlbaum.

18 - Brumfield, R. D., Moore, B. D., and Bobby, D. (1985). Problems with the basic facts may not be the problem. **Arithmetic Teacher**, 33, 17-18.

19 - Davis, E. J., and Coony, T. J. (1977). Identifying errors in solving certain linear algebra. **The MATYC Journal**, 11, 170-8.

20 - Davis, R. B. (1979). Error analysis in high school mathematics: Conceived as the information-processing pathology. Paper Presented at

the Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Francisco, CA.

21 - Engelhardt, J. M. (1977). Analysis of children computational errors: Qualitative approach. **British Journal of Educational Psychology**, 47, 149-154.

22 - Gagne, R. M., and Briggs, W. W. (1992). **Principles of Instructional Design**. NY: Holt, Rinehart and Winston.

23 - Hatfield, M. M., Edwards, N. T. and Bitter. G. G. (1997). **Mathematics methods for elementary and middle school teachers**, (3rd ed.). Needham Heights, MA: Allyn and Bacon.

24 - Hatfield, O., and McNeil, K. (1994). The relationship between Myers-Briggs personality type and mathematics anxiety among preservice elementary teachers. **Journal of Instructional Psychology**, 21(4), 375-382.

25 - Herscovics, N., and Linchevski, L. A. (1994). Cognitive gap between arithmetic and algebra. **Educational Studies in Mathematics**, 27 (1), 59-78.

26 - Hopkins, C. D., and Ants, Richard L. (1990). **Classroom measurement and evaluation**, (3rd ed.). F.E. Itasca, Illinois: Peacock Publisher.

27 - Janice, P. (1996). The zero product principle error. **Australian Mathematics Teacher**, 53 (4), 14-15.

28 - Klauer, E., and Rule, E. (1985). **Teaching strategies in algebra: the effectiveness of relating and sequencing algebra concepts**. ED 266007.

29 - Laursen, K. W. (1978). Errors in first-year algebra. **The Mathematics Teacher**, 71, 194-5.

30 - Lindquist, M. M. (1989). Results from the fourth mathematics assessment of the NAEP. Reston, VA: National Counsil of Teachers of Mathematics.

31 - Margulies, S. (1993). Tips for Beginners. **Mathematics Teacher**, 86, 40-41.

32 - Martinez, J. G. R. (1988). Helping students understanding factors and terms. **Mathematics Teacher**, 81, 747-51.

33 - Movshovitz, N., and Zaslavsky, O. (1987). An empirical classification

model for errors in high school mathematics. **Journal of Research in Mathematics Education**, 18, 3-14.

34 - National Center for Educational Statistics, U.S. Department of Education, (2000). **Pursuing Excellence: Comparisons of International Eighth-Grade Mathematics and Science Achievement from a U.S. Perspective, 1995 and 1999 (NCES 2001-028)**. Washington, D.C: U.S. Government Printing Office.

35 - Parish, C. R. and Ludwig, H. J. (1994). Language, intellectual structure and common mathematics errors: A call for research. **School Science and Mathematics**, 94, 235-39.

36 - Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. **Journal for Research in Mathematics Education**, 10, 163-172.

37 - Radatz, H. (1980). Students errors in the mathematical learning process: A survey. **For the Learning of the Mathematics**, 1 (1), 16-20.

38 - Roberts, G. H. (1968). The failure strategies of third grade arithmetic pupils. **The Arithmetic Teacher**, 15, 442-446.

39 - Sealey, J. (1985). **Remediation. R and D Interpretation Service Bulletin: Mathematics**. Appalachia Education Lab, National Institution of Education, Washington. (ERIC Document Reproduction Service No. Ed 262966).

40 - Sleeman, D., Kelly, A. E., Martinak, R., Ward, R. D., and Moore, J. L. (1989). Studies of diagnosis and remediation with high school algebra students. **Cognitive Science**, 13, 351-568.

41 - Steven, S. (1996). Some common algebraic misconceptions. **Mathematics and Computer Education**, 30 (2), 164-173.

42 - Whitcraft, L. H. (1980). Remedial work in high school mathematics. **Mathematics Teacher**, 73, 51-60