نمو القدرة على التفكير الرياضي عند الطلبة في مرحلة الدراسة الثانوية وما بعدها

فريد كامل أبو زينة ★

★ حصل على الدكتوراه في المناهج وأساليب تدريس الرياضيات عام ١٩٧٦ من جامعة وسكنسن بالولايات المتحدة . يعمل أستاذا مشاركا في دائرة التربية بجامعة اليرموك ـ الأردن .

الملخص

اهتمت مناهج الرياضيات الحديثة ، في معظم دول العالم ، إهتماما كبيراً بتنمية التفكير الرياضي عند الطلبة ، وإكسابهم طريقة في التفكير تساعدهم في اكتساب المعرفة ، وحل المشكلات واتخاذ القرارات . وقد هدفت الدراسة الحالية إلى تحديد النمو الحاصل في القدرة على التفكير الرياضي بتقدم الطلبة في الدراسة الأكاديمية من المرحلة الثانوية إلى مرحلة التعليم الجامعي ، كما هدفت أيضا إلى معرفة أثر برنامج دراسة الطالب في مقدرته على التفكير الرياضي .

تألفت عينة الدراسة من ٨٥٤ طالبا وطالبة مثلوا طلبة في مرحلتي التعليم الثانوي والجامعي وذلك ضمن مستويات تعليمية أربعة : الصف الأول الثانوي (١٠) سنوات دراسية ، الصف الثاني الثانوي (١١ سنة) دراسية ، سنتان دراسيتان بعد المرحلة الثانوية ، ٤ سنوات دراسية في المرحلة الجامعية . كما مثلت هذه العينة برامج دراسية مختلفة : ثانوي علمي مع ثانوي أدبي ، جامعيون سنة ثانية ومعاهد معلمين ، جامعيون رياضيات وجامعيون علوم .

وقد استخدم لأغراض قياس مقدرة الطالب على التفكير الرياضي إختبار تم إعداده خصيصا لهذه الغاية ، وقد تحققت له دلالات صدق وثبات كافية . أما مظاهر التفكير الرياضي التي تحددت بالاختبار فكانت : الاستقراء ، التعميم ، الاستنتاج (الإستدلال) ، التعبير بالرموز ، المنطق الشكلي ، البرهان .

دلت نتائج البحث على تحسن ونمو في القدرة على التفكير الرياضي بتقدم الطلبة في الدراسة من المرحلة الثانوية إلى المرحلة الجامعية ، وتفوق البرامج الأكاديمية الدراسية التي تتضمن أنشطة وخبرات موجهة في الرياضيات على تلك البرامج التي لا تتوجه بشكل واضح نحو الرياضيات وأسلوبها في المناقشات والمحاكمات . فطلبة المرحلة الثانوية / المسار العلمي تفوقوا على طلبة المرحلة الثانوية / المسار الأدبي . وطلبة الرياضيات في السنة الجامعية الرابعة تفوقوا على طلبة العلوم في السنة الجامعية الرابعة ، كما تفوق طلبة الجامعة في المرحلة المتوسطة على نظرائهم الطلبة في معاهد المعلمين .

وقد تبين أيضا أن مقدرة الطلبة عموما في التعميم والإستقراء ، كانت عالية نسبيا ، في حين كانت متدنية في الإستدلال والبرهان . وهذا بدوره يشير إلى أن مناهج الرياضيات الحالية ما زال يعوزها الإهتمام والتوجه نحو تنمية مقدرة الطالب على البرهان والمناقشات التي تبنى على المحاكمات الإستدلالية .

خلفية الدراسة وإطارها النظري

اهتمت مناهج الرياضيات الحديثة ، في معظم دول العالم ، اهتماما كبيرا بتنمية التفكير الرياضي عند الطلبة وإكسابهم طريقة في التفكير تعتمد على بناء رياضي دقيق وسليم . وتضمنت هذه المناهج ضمن قائمة الأهداف التي نصت عليها فقرات تناولت جوانب معينة من التفكير الرياضي . فأهداف التعليم العام في الولايات المتحدة الأمريكية ، كما وردت في تقرير لجنة هارفارد ، Report of the Harvard Committee ، هي مساعدة الطلبة على التفكير الفعال ، وتوصيل الأفكار ، وإعطاء الأحكام والقرارات المناسبة ، والوصول إلى الإستنتاجات الصحيحة . . . .(Butler etal, 1970: 41- 43)

وبرنامج الرياضيات يجب أن يعمل على إكساب الطلبة هذه الأهداف الأساسية من خلال إعدادهم فيما يلي :

- عادات التفكير الفعال (Effective thinking) : وهو مصطلح عام يتضمن التفكير التحليلي ، والتفكير الناقد ، والتفكير الإفتراضي ـ الاستدلالي ، بالإضافة إلى الاستدلال بالمشابهة ، وتطوير حب الاستطلاع العقلي .
- توصيل الأفكار للآخرين باستخدام الرموز والرسومات البيانية .
- تطوير القدرة على إعطاء الأحكام والقرارات المناسبة ، والوصول إلى الاستنتاجات الصحيحة .
- التمييز بين البيانات ذات العلاقة والبيانات الزائدة . . . الخ .

ووردت في منهاج الرياضيات الأردني للمرحلتين الإعدادية والثانوية الأهداف التالية :

- أن يستخدم الطالب لغة الرياضيات في التعبير عن أفكاره وإيصالها للآخرين بدقة ووضوح .
- تنمية قدرة الطالب على التفكير المنطقي ، والبرهان الرياضي ، واستخدام ذلك في فهم المشكلات وحلها . (وزارة التربية والتعليم ، ١٩٨٢) .

وكان من جملة التوصيات التي قدمتها اللجان والمؤتمرات المتعددة التي بحثت في تطوير محتوى مناهج الرياضيات وأساليب تدريسها إدراك الدور الذي يجب أن يلعبه منهاج الرياضيات في تنمية التفكير المنطقي عند الطلبة . وأشارت التقارير ، (مثلا CEEB, 1959; CCSM, 1963) ، بصورة صريحة إلى ضرورة إحتواء منهاج الرياضيات لمفاهيم ومبادىء في المنطق الشكلي Formal Logic) .

وينظر التربويون إلى التفكير المنطقي على أنه أحد مكونات التفكير الناقد الذي يشكل بدوره أحد أهداف التربية العامة (Ausubel: 1977, Ennis: 1975, Eisenberg & Mcginty: 1974, Suppes & Binford: 1966).

أما التربويون المتخصصون في الرياضيات فاهتمامهم بالتفكير المنطقي منبثق من أهمية الدور الذي يلعبه في المحاكمات (المناقشات) الرياضية ، وحل المسألة ، والبرهان الرياضي (Damarin: 1977) . والتفكير المنطقي لازم للفكر ، ولايمكن الاستغناء عنه في عمليات اكتساب المعرفة ، وحل المشكلات واتخاذ القرارات (Ausubel: 1977, Suppes & Binford: 1966) .

ويقصد بالتفكير المنطقي ، ذلك النوع من التفكير الذي يتم به الوصول إلى نتيجة من مقدمات تتضمن النتيجة بما فيها من علاقات . وبعبارة أخرى ، فإن التفكير المنطقي يعني باستخلاص التضمنيات

من المقدمات بغض النظر عن المحتوى المادي للمقدمات نفسها (Copeland; 1979; Larrabee; 1970) . وكما هو معروف ، فإن استخلاص النتائج الصحيحة من المقدمات يخضع لقواعد تعرف بقواعد المنطق .

ولدور التفكير المنطقي في الفكر وأهميته له ، فقد تصدى الباحثون التربويون والنفسيون لدراسته من جوانبه المتعددة ، فاهتموا بقياسه واستقصاء العوامل التي تؤثر في القدرة عليه ، كما عنوا أيضا بفهم تطوره عند الأفراد بتقدمهم في العمر ومن دون تدريبهم مباشرة على قواعده المعروفة (الشيخ وأبو زينة : ١٩٨٣) .

ويظهر الأطفال في مرحلة العمليات الحسية (ما قبل سن الرابعة عشرة) حالات من القصور في التفكير المجرد لأن تفكيرهم مازال مرتبطاً بالواقع الحسي ، وهم غير قادرين على التفكير المبني على الافتراضات (وخصوصا غير الواقعية أو غير المألوفة منها) ؛ ونتيجة لذلك فهم لايملكون طريقة منظمة لحل المشكلات . أما في مرحلة العمليات المجردة ، فإنهم يصبحون قادرين على البحث في غير المحسوس ، ويصبح تفكيرهم منطلقا من الافتراضات للوصول إلى الممكنات المترتبة عليها (Chapman, 1972: 156-161), (Copeland: 1979) . ففي الصفوف الإبتدائية مثلا (مرحلة العمليات الحسية) ؛ لاتكاد تختلف قدرات الأطفال على التفكير الإستدلالي باختلاف العمر أو الصف (مثلا : الصف الرابع والصف السادس) ؛ وتتضح الفروق فيما بين طلبة المرحلة الإعدادية والمرحلة الثانوية في بعض جوانب التفكير المنطقي ـ المبادىء الشرطية الصادقة ـ (Roberge: 1970) . وتزداد قدرة الأفراد على التفكير الإستدلالي بتقدم الطلبة في صفوف المرحلة الثانوية (شطناوي : ١٩٨٢) ، (O'Brein: 1972, Jannasson: 1977) . ويصاحب ارتقاء الطلبة في الدراسة الأكاديمية من المرحلة الثانوية إلى المرحلة الجامعية نمو أو تحسن في القدرة على التفكير المنطقي الفرضي (أبو زينة والشيخ : ١٩٨٤) .

ومن السمات المميزة للمناهج الحديثة في الرياضيات إعطاء دور نشط للطالب في عملية التعلم والتعليم ، كاستخدام الأسلوب الإستكشافي في التدريس أو في عرض المادة التعليمية . ولطريقة الإكتشاف في التدريس نتائج أكثر إيجابية على تنمية التفكير الرياضي (والتفكير الناقد) لدى الطلبة (شطناوي : ١٩٨٢) ، (Price: 1967) ، وهي تتفوق على الطرق التقليدية في التفكير الإبتكاري . كما أن تدريس المفاهيم الخاصة بالمنطق بالأسلوب الإستكشافي زاد من قدرة الطلبة على صياغة التعميمات التي يكتشفونها صياغة لفظية سليمة (Kenneth & Henderson: 1967) . وبالرغم من ذلك ، مازالت المناهج الحديثة وطرق التدريس عاجزة عن تنمية قدرة الطلبة على حل المسألة الرياضية (Carpenter etal: 1980a) .

يتبين مما سبق ، أن معظم الدراسات كانت تتناول مظهراً واحداً من مظاهر التفكير الرياضي ، وعلى وجه التحديد التفكير المنطقي الإفتراضي عند الطلبة في المرحلة الثانوية أو ما قبلها . ومع أن بعض الدراسات تناولت مظاهر أخرى كالتفكير الإبتكاري أو التفكير الناقد أو صياغة التعميمات ، إلا أن أكثرها شمولا لمظاهر التفكير الرياضي كانت الدراسة الأردنية لشنطاوي (١٩٨٢) حيث تناولت التفكير

الإستدلالي بشقيه الإستنتاجي والإستقرائي ، وكذلك قواعد المنطق الشكلي . ومن الجدير بالذكر أن العديد من الدراسات تناولت جانب الاتجاهات نحو الرياضيات والاستمتاع بدراسة الرياضيات مثلاً (Denmark & Kepner: 1980, Carpenter etal: 1980b) . وتأتي الدراسة الحالية لتحديد النمو الخاص في التفكير الرياضي عند الطلبة بارتقائهم من مرحلة التعليم الثانوي إلى مرحلة التعليم الجامعي ، واستقصاء أثر نوع برنامج الدراسة في القدرة على التفكير الرياضي عند الطلبة .

ومظاهر التفكير الرياضي التي تتناولها الدراسة الحالية هي :

(ا) التعميم (Generalization)

هو صياغة منطوقة أو عبارة (Statement or proposition) مكتوبة بالصورة العامة وذلك بملاحظة بعض الحالات الخاصة ، كأن يتوصل الطالب إلى صياغة التعميم التالي :

« حاصل ضرب عدد سالب في عدد سالب يساوي عدد موجب » وذلك من ملاحظة نواتج الضرب التالية :

$-٣ \times -٥ = ١٥$ ، $-٤ \times -٧ = ٢٨$ ، $-٩ \times -٨ = ٧٢$ ، . . . .

(ب) الاستقراء (Induction)

الاستقراء هو الوصول إلى نتيجة ما من بعض المشاهدات أو الملاحظات أو الأمثلة الخاصة ، كأن يتوصل الطالب إلى تحليل المقدار ($س^{ن} - ١$) اعتمادا على تحليل بعض العبارات المألوفة من نوع : ($س^{٢} - ١$) أو ($س^{٣} - ١$) أو ($س^{٤} - ١$) ، أو يكتب العدد العاشر في متتالية الأعداد :

$٢\frac{١}{٢}$ ، $٤\frac{١}{٣}$ ، $٦\frac{١}{٤}$ ، . . .

ولا تبدو هناك حدود فاصلة أو مميزة بين الاستقراء والتعميم ، والفارق الوحيد بينهما (في الدراسة الحالية) هو في الصياغة اللغوية للنتيجة ، أو الملاحظة في حالة التعميم . أما في الاستقراء فيكتفى بوضع النتيجة التي قد تكون عدداً أو مقداراً جبريا أو ما شابه ذلك .

(جـ) الاستدلال أو الاستنتاج (Deduction)

ويقصد به الوصول إلى نتيجة خاصة اعتمادا على مبدأ عام أو مفروض ، أو هو تطبيق المبدأ أو القاعدة العامة على حالة (أو حالات) خاصة من الحالات التي تنطبق عليها القاعدة أو المبدأ . فالاستنتاج عملية اشتقاق للخصائص أو النتائج الخاصة من قواعد أو مبادىء عامة تغطي الحالات الخاصة (Bern-kopf, 1975: 8) .

(د) التعبير بالرموز (Symbolism)

أي استخدام الرموز للتعبير عن الأفكار الرياضية أو المعطيات اللفظية ، فمثلا يعبر عن القاعدة « مجموع مربعي العددين أقل من أو يساوي مربع مجموع العددين » بالرموز على النحو $س^{٢} + ص^{٢} \leqslant (س + ص)^{٢}$.

ـ المنطق الشكلي أو الصوري (Formal Logic)

وهو دراسة منطق العبارات تبعا لشكلها ، حيث تمثل العبارات ونفيها وأدوات الربط المنطقية بالرموز ، وتطبق النتائج النهائية على جميع العبارات التي لها الشكل نفسه .

وكما أشير سابقا ، فإن التفكير المنطقي يعني باستخلاص النتائج من المقدمات .

وكما هو معروف ، فإن استخلاص النتائج يخضع لقواعد تعرف بقواعد المنطق الشكلي .

ـ البرهان الرياضي (Mathematical Proof)

البرهان الرياضي هو الدليل أو الحجة لبيان أن صحة عبارة ما تنبع من صحة عبارات سابقة لها (Butler etal, 1971: 197) . أو هو سلسلة من العبارات لبيان صحة نتيجة ما عن طريق الاستدلال والمنطق وتقديم الدليل أو البيّنة استنادا إلى نظرية سابقة أو مسلمة .

هذا ، وقد تم حصر هذه المظاهر بناء على آراء مجموعة من المختصين بالرياضيات وأساليب تدريسها بالجامعة الأردنية وجامعة اليرموك ووزارة التربية والتعليم الأردنية .

أسئلة الدراسة وفرضياتها

هدفت هذه الدراسة أولا إلى تحديد النمو الحاصل في القدرة على التفكير الرياضي بتقدم الطلبة في الدراسة الأكاديمية من المرحلة الثانوية إلى مرحلة التعليم الجامعي ، كما هدفت ثانيا إلى معرفة أثر برنامج دراسة الطالب في قدرته على التفكير الرياضي وذلك ضمن مظاهر التفكير التي تمت الإشارة إليها سابقا .

وبالتحديد ، فإن الدراسة حاولت الإجابة عن السؤالين التاليين :

١ ــ هل تنمو قدرة الطالب على التفكير الرياضي بازدياد عدد السنوات الدراسية التي يقضيها على مقاعد الدراسة في مرحلتي التعليم الثانوي والعالي ؟

٢ ــ هل تتأثر قدرة الطالب على التفكير الرياضي بنوع برنامج الدراسة الذي يلتحق فيه في أثناء دراسته في المرحلة الثانوية أو الجامعية ؟

وللإجابة عن هذين السؤالين ، وضعت الفرضيتان التاليتان موضع الإختبار :

الفرضية الأولى : تزداد قدرة الطالب على التفكير الرياضي بازدياد عدد سنوات الدراسة المنتظمة والرسمية التي يقضيها الطالب على مقاعد الدراسة . وعلى وجه التحديد ، تزداد قدرة الطالب على التفكير الرياضي كلما ارتقى إلى صف أعلى في سلم الدراسة حسب التسلسل التالي :

الصف الأول الثانوي ← الصف الثاني الثانوي ← السنة الثانية بعد المرحلة الثانوية ← السنة الرابعة الجامعية .

الفرضية الثانية : تختلف قدرة الطالب على التفكير الرياضي باختلاف برنامج الدراسة أو التخصص الذي يلتحق فيه في أثناء دراسته في المرحلة الثانوية أو الجامعية . وبالتحديد :

أ ــ القدرة على التفكير الرياضي عند طلبة الصف الثاني الثانوي العلمي تختلف عن القدرة على التفكير الرياضي عند طلبة الصف الثاني الثانوي الأدبي .

ب ــ القدرة على التفكير الرياضي عند طلبة معاهد المعلمين أو الكليات الجامعية المتوسطة (تخصص علوم ورياضيات) تختلف عن القدرة على التفكير الرياضي عند نظرائهم من طلبة الجامعة .

جـ ــ القدرة على التفكير الرياضي عند طلبة الجامعة / سنة رابعة ـ تخصص رياضيات تختلف عن القدرة على التفكير الرياضي عند طلبة الجامعة / سنة رابعة في التخصصات العلمية .

الطريقــة

أفراد الدراسة

تألفت عيّنة الدراسة من الفئات التالية ، وقد تم اختيارها في الفصل الدراسي الثـاني في العام ٨٣/٨٢ .

١ ــ طلبة الصف الأول الثانوي ، وبلغ عددهم ٢٦٤ طالبا وطالبة كانوا موزعين في (٧) شعب أو فصول اختيرت عشوائيا من ٤ مدارس ثانوية للذكور والإناث في مدينة إربد .

٢ ــ طلبة الصف الثاني الثانوي الأدبي ، وعددهم ١٠٦ جاؤوا من ٤ مدارس ثانوية للذكور والإناث في مدينة إربد وكانوا موزعين في ٤ شعب .

٣ ــ طلبة الصف الثاني الثانوي العلمي ، وعددهم ١٤٢ طالبا وطالبة كانوا موزعين في ٤ فصول اختيرت عشوائيا من ٤ مدارس ثانوية في مدينة إربد .

٤ ــ طلبة كليات جامعية متوسطة (معاهد معلمين) من مستوى السنة الثانية ، ويتخصصون في تدريس العلوم والرياضيات للمرحلة الإبتدائية والإعدادية ؛ وقد بلغ عددهم ١١٨ طالبا وطالبة اختيروا من الكليات الجامعية المتوسطة في منطقة إربد التعليمية .

٥ ــ طلبة جامعيون في مستوى السنة الثانية في كلية العلوم بجامعة اليرموك ، بلغ عددهم ٦٤ طالبا وطالبة كـانوا مسجلين في مسـاق الحاسب الإلكتـروني رقم ١٠١ في شعبتـين ، ويتخصصـون في أحـد الموضوعات العلمية التالية : فيزياء ، كيمياء ، رياضيات ، علوم حياتية .

٦ ــ طلبة جامعيون في مستوى السنة الرابعة في كلية العلوم بجامعة اليرموك ، ويتخصصـون في أحد موضوعات العلوم الأساسية التالية : فيزياء ، كيمياء ، علوم حياتية : وقد بلغ عدهم ٧٨ طالبا وطالبة مسجلين في مساقين من مساقات أساليب تدريس العلوم ومساق آخر في الكيمياء .

٧ ــ طلبة جامعيون في مستوى السنة الرابعة في كلية العلوم بجامعة اليرموك / تخصص رياضيات ، وقد بلغ عددهم ٨٤ طالبا وطالبة كانوا مسجلين في مساقين من مساقات أساليب تدريس الرياضيات ت ٤٦٥ ، ت ٤٦٦ .

وبذلك بلغ عدد أفراد عينة الدراسة ٨٥٦ طالبا وطالبة . ولأغراض هذه الدراسة تم تجميعهم حسب عدد سنوات الدراسة في المرحلة الثانوية والجامعية وكذلك حسب برنامج الدراسة كما في الجدول (١) :

الجدول (١)
إعداد فئات الدراسة حسب البرنامج الدراسي
وعدد السنوات الدراسية

الصنف	عدد السنوات الدراسية	نوع برنامج الدراسة	أعداد الطلبة	العدد
طلبة الصف الأول الثانوي	١٠	البرنامج الأكاديمي	٢٦٤	٢٦٤
طلبة الصف الثاني الثانوي	١١	المسار العلمي	١٤٢	٢٤٨
		المسار الأدبي	١٠٦	
طلبة جامعيون مرحلة متوسطة	١٣	طلبة جامعة	٦٤	١٨٢
		معاهد معلمين	١١٨	
طلبة جامعيون السنة النهائية	١٥	تخصص علوم	٧٨	١٦٢
		تخصص رياضيات	٨٤	
جميع الطلبة				٨٥٦

أداة القياس

اعتمد في هذا البحث : لقياس التفكير الرياضي ، اختبار طوره الباحث وأحد طلبة الدراسات العليا بجامعة اليرموك . وتألف المقياس الأصلي من ٣٦ فقرة تقيس المظاهر الستة التالية بواقع (٦) فقرات لكل منها :

التعميم ، الاستقراء ، الاستدلال أو الاستنتاج ، التعبير بالرموز ، المنطق الشكلي أو الصوري ، البرهان الرياضي .

وقد تم حصر هذه المظاهر من بين (١٤) مظهرا من مظاهر التفكير الرياضي التي اقترحها عدد من المختصين في الرياضيات وأساليب تدريسها في الجامعة الأردنية وجامعة اليرموك ووزارة التربية والتعليم . تألف المقياس في صورته الأولية من ٥٧ فقرة تم عرضها على المختصين وتجريبها على عينة من الطلبة ، وبالتالي اختيار ٣٦ فقرة اعتبرت مناسبة لأغراض البحث والدراسة . وقد تحققت للاختبار دلالات صدق وثبات اعتبرت مقبولة لأغراض مثل هذا النوع من الأبحاث . فقد وصل معامل الثبات حسب صيغة كودر ريتشاردسون (٢٠) KR 20 ٠,٧٣ كما بلغ معامل الارتباط بين الأداء على هذا الاختبار ونتائج الطلبة المدرسية في مادة الرياضيات حوالي ٠,٥٧ (شطناوي : ١٩٨٣) .

وقبل تطبيق الاختبار بالصورة المذكورة أعلاه تم إجراء بعض التعديلات اللغوية على بعض الفقرات ، وبناء على نتائج معاملات التمييز المستخلصة من الدراسة السابقة (شطناوي : ١٩٨٣) تم الخروج بمقياس مؤلف من ٣١ فقرة بواقع ٥ فقرات لكل مظهر من مظاهر التفكير الرياضي الستة فيما عدا الاستقراء الذي بقي يحتفظ بـ ٦ فقرات .

وقد بلغ معامل الثبات للإختبار بالوضع الذي طبق فيه في هذه الدراسة ٠,٧٨ لجميع فئات الدراسة : ٠,٧٥ لطلبة المرحلة الثانوية ، ٠,٧٧ لطلبة الجامعة ومعاهد المعلمين . وفيما يلي نماذج من أسئلة الإختبار الذي أعطي للطلبة :

التعميم

لاحظ العددين إلى يمين المساواة ومجموعهما إلى يسار المساواة ، ماذا يمكنك أن تستنتج ؟

٨ + ١٣ = ٢١ ١٧ + ٢٨ = ٤٥

٩ + ١٤ = ٢٣ ٢٤ + ٧ = ٣١

١٨ + ٢١ = ٣٩ ١١ + ١٢ = ٢٣

الاستنتاج : حاصل جمع عددين أحدهما فردي والآخر زوجي هو عدد فردي .

الاستقراء

ظهرت مجموعة من الأعداد مرتبة كما يلي :

$٣\frac{١}{٢}$ ، $٥\frac{١}{٣}$ ، $٧\frac{١}{٤}$ ، $٩\frac{١}{٥}$ ، . . . .

ما هو العدد العاشر ؟

العدد العاشر يساوي $٢١\frac{١}{١١}$

الاستدلال (الاستنتاج)

قطرا المعين متعامدان . أ ب جـ د شكل رباعي قطراه متعامدان (معطيات) : نستنتج أن الشكل أ ب جـ د هو :

(أ) معين (ب) متوازي أضلاع (جـ) مربع (د) لاشيء مما ذكر

الجواب : لاشيء مما ذكر .

التعبير بالرموز

لدينا عددان ؛ الأول ورمزه س ، والثاني ورمزه ص .

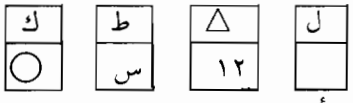
عبر بالرموز عن القاعدة التالية :

« مجموع مربعي العددين أقل من أو يساوي مربع مجموع العددين » .

القاعدة بالرموز هي : $س^{٢} + ص^{٢} \leqq (س + ص)^{٢}$

ـ المنطق الشكلي (الصوري)

إذا ظهر حرف في النصف الأعلى من البطاقة يظهر عدد في النصف الأسفل منها إختر البطاقة التي تتفق مع هذا النص من البطاقات الأربع التالية :



(د) (جـ) (ب) (أ)

البطاقة التي تتفق مع القاعدة المذكورة اعلاه هي البطاقة ذات الرمز (ب) .

البرهان الرياضي

تعريف (١) الخط هو مجموعة تحوي ثلاث نقط .

(٢) يتوازى الخطان إذا لم تكن بينهما نقطة مشتركة ، ويتقاطعان فيما عدا ذلك .

هذا التعريف يحدد تقاطع خطين على النحو التالي :

أ ـ يتقاطع الخطان إذا اشتركا في نقطة واحدة فقط .

ب ـ يتقاطع الخطان إذا اشتركا في نقطتين .

جـ ـ يتقاطع الخطان إذا اشتركا في نقطة واحدة أو أكثر .

د ـ يتقاطع الخطان إذا اشتركا في نقطة واحدة ووقعا في مستو واحد .

يحدد التعريف تقاطع خطين على النحو التالي :

يتقاطع الخطان إذا اشتركا في نقطة واحدة أو أكثر .

التصميم الإحصائي والتحليل

استخدم لاختبار فرضيتي الدراسة الرئيسيتين تحليل التباين الأحادي (One- Way Anova) على الدرجة الكلية للطالب في اختبار التفكير الرياضي ، والتي تقيس المتغير التابع في هذه الدراسة ، وكان عدد الفئات التي دخلت في حساب قيمة ف (F-Value) عند إجراء اختبار (F) هو جميع فئات الدراسة (٧ فئات) . وقيمة ف المحسوبة هكذا ، عندما تكون دالة إحصائيا ، تشير إلى اختلافات ضمنية بين فئات الدراسة . ولكي يتم الكشف عن مصادر هذه الفروقات ، وللإجابة عن فرضيات الدراسة ، استخدم أسلوب شافيه (Sheffe'Test) في إجراء المقارنات البعدية .

النتائـــج

لتكوين صورة تفصيلية عن أداء المجموعات المختلفة على أجزاء الاختبار المختلفة ، تم حساب متوسطات علامات الأفراد على المظاهر الستة للتفكير الرياضي ، ولكل فئة من فئات الدراسة ، وقد عدلت النتائج ليكون المجموع من (١٠) على كل اختبار فرعي لتسهل عملية المقارنة والتمثيل البياني للنتائج ، والجدول (٢) يوضح النتائج التي تم الحصول عليها :

الجدول (٢)
متوسطات* أداء المجموعات المختلفة على أجزاء اختبار
التفكير الرياضي

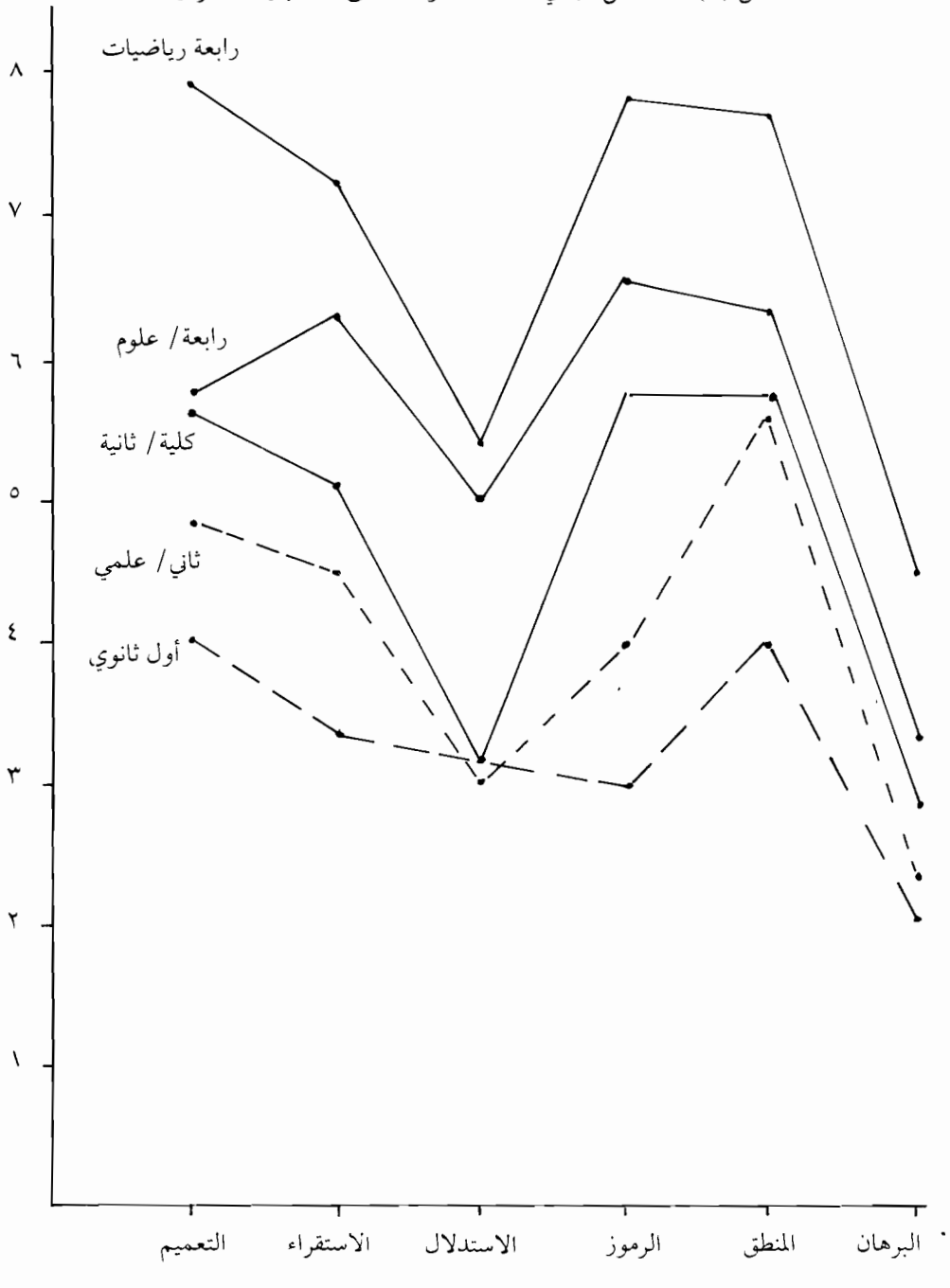
الاختبار / الفئة	التعميم	الاستقراء	الاستدلال	استخدام الرموز	المنطق	البرهان
رياضيات/ رابعة	٨	٧,٢	٥,٢	٧,٦	٧,٤	٤,٢
علوم / رابعة	٥,٨	٦,٢	٤,٨	٦,٤	٦,٢	٣,٢
جامعيون / ثانية	٦,٧	٦,٢	٥,٣	٦,٢	٦,٣	٣,٦
كلية / ثانية	٥,٧	٥,٣	٣,-	٥,٧	٥,٧	٢,٩
ثاني ثانوي / علمي	٤,٩	٤,٥	٢,٩	٤,-	٥,٥	٢,٣
ثاني ثانوي/ أدبي	٣,٦	٤,-	٢,٢	١,٨	٤,١	١,٩
أول ثانوي	٣,٩	٣,٤	٣,-	٢,٨	٣,٩	٢,١

* العلامة المعطاة من (١٠) .

ويلاحظ من الجدول أن أعلى أداء كان أداء طلبة السنة الرابعة / تخصص رياضيات ، وكان أداء طلبة الصف الثاني الثانوي الأدبي منخفضا جدا . وبالنسبة لجميع المجموعات كان الأداء في صورته الدنيا على جزأي الاختبار اللذين يقيسان الاستدلال (Dedudction) والبرهان الرياضي .

والشكل التالي يبين أداء هذه المجموعات على أجزاء الاختبار ، ويتضح من الشكل ترتيب المجموعات حسب أدائها على الاختبارات الفرعية .

الشكل (١) : التمثيل البياني لأداء المجموعات على الاختبارات الفرعية



ملاحظة : جامعيون/ ثانية متقاربون مع علوم رابعة .
ثاني/ أدبي متقاربون مع أول ثانوي

ولتكوين صورة شمولية للأداء على الاختبار الكلي حسبت الأوساط الحسابية والانحرافات المعيارية لفئات الدراسة المختلفة على اختبار التفكير الرياضي (العلامة القصوى على الاختبار الكلي هي ٣١) فكانت كما في الجدول التالي :

الجدول (٣)
الأوساط الحسابية والانحرافات المعيارية لفئات الدراسة السبع على اختبار التفكير الرياضي*

الفئة	عدد الطلبة	الوسط الحسابي	الانحراف المعياري
١) الأول الثانوي	٢٤٥	٩,٩٢	٤,٨٨
٢) الثاني الثانوي (أدبي)	١٠٠	٩,١٨	٣,١٢
٣) الثاني الثانوي (علمي)	١٣٢	١٢,٤٨	٣,٨٥
٤) كليات مجتمع / ثانية (علوم)	١١٥	١٤,٧٥	٤,٧٥
٥) جامعيون/ ثانية (علوم)	٦١	١٧,٧٢	٤,٤٨
٦) جامعيون/ رابعة (علوم)	٦٩	١٧,٠٣	٣,٨٦
٧) جامعيون/ رابعة (رياضيات)	٨٢	٢٠,٤٥	٣,٤٢

* العلامة القصوى على الاختبار تساوي ٣١ .

وكما يبين الجدول (٣) كانت النتائج كما هو متوقع . فقد كان الأداء الأدنى لطلبة الفرع الأدبي في المرحلة الثانوية حيث بلغ الوسط الحسابي لهم ٩,١٨ ، كما كان الأداء الأعلى لطلبة الجامعة / تخصص رياضيات حيث كان الوسط الحسابي لهم ٢٠,٤٥ .

ولمعرفة الدلالة الإحصائية للفروق بين متوسطات أداء الفئات المختلفة ، استخدم اختبار ف (F test) على التصميم الأحادي . (One Way Analysis of Variance)

والجدول (٤) يلخص بنتائج تحليل التباين استخدام

الجدول (٤)
ملخص نتائج تحليل التباين الأحادي على اختبار
التفكير الرياضي

مصدر التباين	مجموع المربعات SSt	درجات الحرية df	متوسط المربعات M S	قيمة ف F
بين المجموعات Between Groups	١١١٥٥	٦	١٨٥٩,١٧	*١٠٨,٢٢
داخل المجموعات Within Groups	١٣٧٠٧	٧٩٨	١٧.١٨	
الكلي Total	٢٤٨٦٢	٨٠٤		

ذات دلالة إحصائية عند ∝ = ٠,٠١ أو أقل حيث ف ٠,٠١ (٦, ٧٩٨) = ٢,٨٠

تشير قيمة ف المحسوبة في الجدول أعلاه أن هناك فروقا جوهرية بين الأوساط الحسابية لأداء المجموعات المختلفة التي اختيرت في هذه الدراسة . وحتى يتم تحديد الفروق الدالة إحصائيا ، رتبت هذه المجموعات تصاعديا حسب متوسط أدائها واستخدم اختبار شافيه (Sheffe'Test) لهذه الغاية (Kirk, 1968: 91,68) . ويبين الجدول (٥) الدلالات الإحصائية للفروق بين أداء أي مجموعتين من مجموعات الدراسة المختلفة .

الجدول (٥)
الفروق بين متوسطات مجموعات الدراسة ودلالاتها
الإحصائية حسب اختبار شافيه

الفئة والوسط الحسابي	سَ٢	سَ١	سَ٣	سَ٤	سَ٦	سَ٥	سَ٧
ثاني أدبي سَ٢ = ٩,١٨	-	٠,٧٤ ▲	*٣,٣٠	*٥,٥٧	*٧,٨٥	*٨,٥٤	*١١,٢٧
أول ثانوي سَ١ = ٩,٩٢	-	-	*٢,٥٦	*٤,٨٣	*٧,١١	*٧,٨٠	*١٠,٥٣
ثاني علمي سَ٣ = ١٢,٤٨	-	-	-	*٢,٢٧	*٤,٥٥	*٥,٢٤	*٧,٩٧
معاهد/ علمي سَ٤ = ١٤,٧٥	-	-	-	-	**٢,٢٨	*٢,٩٧	*٥,٧٠
جامعة/ علوم سَ٦ = ١٧,٠٣	-	-	-	-	-	*٠,٦٩	*٣,٤٢
جامعة/ ثانية سَ٥ = ١٧,٧٢	-	-	-	-	-	-	**٢,٧٢
جامعة/ رياضيات سَ٧ = ٢٠,٤٥	-	-	-	-	-	-	-

* ذات دلالة إحصائية على مستوى = ٠,٠١
** ذات دلالة إحصائية على مستوى = ٠,٠٥
▲ ليست دالة إحصائيا .

يبين الجدول أن جميع الفروق كانت دالة إحصائيا فيما عدا الفرق بين الصف الأول الثانوي والصف الثاني الثانوي الأدبي ، وكذلك الفرق بين طلبة الجامعة من مستوى السنة الثانية / علوم وطلبة الجامعة من مستوى السنة الرابعة / علوم .

وللإجابة عن السؤال الأول في هذه الدراسة ، تم تجميع فئات الدراسة حسب السنوات الدراسية كما في الجدول (٦) .

الجدول (٦)

تصنيف الأفراد حسب عدد السنوات الدراسية

والأوساط الحسابية للنتائج

الفئة	عدد السنوات الدراسية	أعداد الطلبة	الوسط الحسابي
الأول الثانوي الأكاديمي	١٠	٢٤٦	٩,٩٢
الثاني الثانوي (علمي وأدبي)	١١	٢٣٢	١١,١٦
جامعيون (مرحلة وسطى)	١٣	١٧٦	١٦,٢٤
جامعيون (مرحلة نهائية)	١٥	١٥١	١٨,٨٤

وأجريت المقارنات البعدية بين هذه الفئات الأربع باستخدام اختبار شافيه فكانت النتائج كما يلي :

١ ــ طلبة الصف الأول الثانوي مع طلبة الصف الثاني الثانوي : كان الفرق في الأداء على الاختبار بينهما يساوي ١,٢٤ (١١,١٦ ـ ٩,٩٢) . ولم يكن هذا الفرق دالا إحصائيا ، حيث الفرق الإحصائي ذو الدلالة الإحصائية يساوي ١,٣٥ ($\propto$ = ٠,٠٥) .

٢ ــ طلبة الصف الثاني الثانوي العلمي مع طلبة السنة الثانية بعد الثانوية :

كان الفرق في الأداء لصالح الفئة الأخيرة حيث بلغ ٣,٧٦ (١٦,٢٤ ـ ١٢,٤٨) . وهذا الفرق ذو دلالة إحصائية على مستوى $\propto$ = ٠,٠١ (الفرق الحرج = ١,٩٦) .

٣ ــ طلبة السنة الثانية مع طلبة السنة الرابعة / جامعة :

بلغ الفرق بين هاتين المجموعتين على اختبار التفكير الرياضي ٢,٦٠ (١٨,٨٤ ـ ١٦,٢٤) . وهو فرق دال إحصائيا عند مستوى $\propto$ = ٠,٠١ حيث الفرق الحرج = ١,٨٩ .

وللإجابة عن السؤال الثاني في هذه الدراسة تم تجميع فئات الدراسة حسب البرنامج الذي يدرسه الطالب ، والجدول (٧) يبين هذه التجميعات وأعداد الطلبة فيها .

الجدول (٧)

تصنيف الطلبة حسب البرنامج الدراسي والأوساط الحسابية لهذه المجموعات

البرنامج	الفئة	أعداد الطلبة	الوسط الحسابي
ثانوي	ثاني / أدبي	١٠٠	٩,١٨
	ثاني / علمي	١٣٢	١٢,٤٨
جامعة / متوسط	كلية مجتمع	١١٥	١٤,٧٥
	جامعة	٦١	١٧,٧٢
تعليم / عالي	جامعيون / علوم	٦٩	١٧,٠٣
	جامعيون / رياضيات	٨٢	٢٠,٤٥

أجريت المقارنات البعدية بين كل مجموعتين ضمن كل برنامج من البرامج الثلاثة ، وذلك وفق اختبار شافيه ، فكانت النتائج كما يلي :

١ ــ طلبة الثاني الثانوي / علمي مع طلبة الثاني الثانوي الأدبي : بلغ الفرق في الأداء على الاختبار بين هاتين الفئتين ٣,٣٠ (١٢,٤٨ ـ ٩,١٨) لصالح طلبة الفرع العلمي ، وهذا الفرق دال إحصائيا عند مستوى الدلالة α = ٠,٠١ (الفرق الحرج = ٢,٢٥) .

٢ ــ طلبة كليات المجتمع مع طلبة الجامعة / سنة ثانية :

كان الفرق بين متوسطي أداء هاتين المجموعتين ٢,٩٧ (١٧,٧٢ ـ ١٤,٧٥) . وهذا الفرق ذو دلالة إحصائية (α = ٠,٠١) ولصالح طلبة الجامعة .

٣ ــ طلبة الجامعة / تخصص رياضيات مع طلبة الجامعة / تخصص علوم : بلغ الفرق بين أداء هاتين المجموعتين ٣,٤٢ على اختبار التفكير الرياضي (٢٠,٤٥ ـ ١٧,٠٣) . وهو فرق ذو دلالة إحصائية عند مستوى الدلالة α = ٠,٠١ حيث الفرق الحرج = ٢,٨ .

مناقشة النتائج

اهتمت هذه الدراسة بتتبع النمو الحاصل في القدرة على التفكير الرياضي بتقدم الطلبة في الدراسة الأكاديمية من المرحلة الثانوية إلى مرحلة التعليم الجامعي (السؤال الأول) ، كما اهتمت أيضا بدراسة النمو في القدرة على التفكير الرياضي من حيث تأثره بنوع برنامج الدراسة الذي يلتحق فيه الطالب (السؤال الثاني) .

أظهرت نتائج تحليل التباين الأحادي وجود فروق بين أداء المجموعات المختلفة على اختبار التفكير الرياضي (٠,٠١ > أ) ، وقد كان أداء طلبة الصف الأول الثانوي الأكاديمي وطلبة الصف الثاني الثانوي الأدبي هو الأدنى على الاختبار ، في حين كان أداء طلبة الجامعة / سنة رابعة ـ رياضيات هو الأعلى ، وبلغ الفرق بين القيمة العليا والقيمة الدنيا للأداء ١١ , ٢٧ من أصل ٣١ (كعلامة قصوى على الاختبار) . ولما كانت مجموعات الدراسة تختلف فيما بينها من حيث عدد سنوات الدراسة ونوع البرنامج الذي يدرسه الطالب ، لذا يمكن القول بأن لهذين العاملين (معا) تأثيرا على النمو الحاصل في قدرة الطالب بالمرحلة الثانوية أو الجامعية على التفكير الرياضي .

وعند إجراء المقارنات البعدية باستخدام أسلوب شافيه لاختبار صحة الفرضية الأولى التي تنص على :

« تزداد قدرة الطالب على التفكير الرياضي بازدياد عدد سنوات الدراسة المنتظمة والرسمية التي يقضيها الطالب على مقاعد الدراسة » .

تبين لنا ما يلي :

كان أقل أداء على الاختبار للطلبة الذين أمضوا (١٠) سنوات دراسية (طلبة الصف الأول الثانوي) ، وكان أعلى أداء للطلبة الذين امضوا ١٥ سنة دراسية (طلبة السنة الرابعة / تخصص رياضيات) . ويقودنا هذا ، بوجه عام ، لاستنتاج أن القدرة على التفكير الرياضي تزداد بازدياد عدد السنوات الدراسية التي يقضيها الطالب على مقاعد الدراسة . وبالرغم من ذلك . فلم يكن فارق سنة واحدة دراسية بين طلبة الصف الأول الثانوي وطلبة الصف الثاني الثانوي كاف لإنماء القدرة على التفكير الرياضي بشكل جوهري ، وقد يكون السبب في ذلك برنامج الدراسة لطلبة الفرع الأدبي والذي لم يأخذ بين الطلبة لزيادة وتحسين مقدرتهم على التفكير الرياضي ، في حين نجد أن هناك فرقا جوهريا في هذه القدرة بين طلبة الصف الأول الثانوي (١٠ سنوات دراسية) وطلبة الصف الثاني الثانوي العلمي (١١ سنة دراسية) ، ولصالح الفئة الأخيرة . وكان فرق الدراسة بسنتين أو أكثر بين طلبة الصف الثاني الثانوي العلمي وطلبة كليات المعلمين (أو طلبة الجامعة / سنتين دراسيتين) كاف لزيادة قدرة الطلبةعلى التفكير الرياضي ، وبالمثل كان هناك نمو في هذه القدرة بين طلبة السنة الثانية / جامعة وطلبة السنة الرابعة / جامعة .

ومجمل القول هو أن القدرة على التفكير الرياضي تزداد بازدياد عدد السنوات الدراسية التي يقضيها الطالب على مقاعد الدراسة في المرحلة الثانوية والجامعية . وتعني هذه النتيجة أن المناهج الدراسية والمساقات التي يدرسها الطالب ، وعلى وجه الخصوص ماكان ذا صلة بالرياضيات . تعمل على تنمية التفكير الرياضي لدى الطلبة حيث يظهر التحسن في مختلف مظاهر التفكير الذي تناولته الدراسة الحالية .

ولاختبار الفرضية الثانية ، والتي نصت على :

« تختلف قدرة الطالب على التفكير الرياضي باختلاف برنامج الدراسة أو التخصص الذي يلتحق فيه في أثناء دراسته في المرحلة الثانوية أو الجامعية » .

تم إجراء المقارنات البعدية باستخدام أسلوب شافيه أيضا . وقد تم إجراء هذه المقارنات في ثلاث حالات : في كل حالة تمت المقارنة بين مجموعتين من الطلبة متكافئتين في عدد السنوات الدراسية التي درستها ومختلفتين في نوع برنامج الدراسة . وفيما يلي النتائج التي تم استخلاصها :

ـ قدرة الطالب في الفرع العلمي على التفكير الرياضي أعلى من قدرة الطالب في الفرع الأدبي .

ويبدو من المؤكد أن برنامج الطالب في الفرع العلمي بما يحويه من موضوعات في مبحثي العلوم والرياضيات ويفتقر لها برنامج الدراسة للطالب في الفرع الأدبي ـ هو السبب الكامن وراء هذه النتيجة . وظهرت الفروق بين هاتين الفئتين في جميع مظاهر التفكير الرياضي الستة التي تناولتها هذه الدراسة .

ـ تختلف القدرة على التفكير الرياضي لدى طلبة معاهد المعلمين / الفرع العلمي عنها لدى طلبة الجامعة / الفروع العلمية ـ ولصالح الفئة الأخيرة . وتفسير هذه النتيجة قد يعود لأحد السببين التاليين أو كليهما .

أولهما ، أن الطلبة الذين يلتحقون بالدراسة في معاهد المعلمين هم أدنى في قدراتهم التحصيلية العامة من الطلبة الذين يقبلون بالدراسة الجامعية ، وثانيهما أن أساليب التدريس والأنشطة المختلفة التي يتعرض لها الطلبة في أثناء الدراسة الجامعية تختلف عن تلك التي يتعرض لها الطلبة في أثناء دراستهم في معاهد المعلمين ، هذا مع العلم بأن المناهج الدراسية كما تنص عليها الخطط الدراسية متشابهة إلى حد كبير . أي أن الخبرة المكتسبة من الدراسة بالجامعة هي أغنى من تلك التي يكتسبها الطالب من الدراسة في معاهد المعلمين .

ـ القدرة على التفكير الرياضي لدى طلبة الجامعة / السنة الرابعة ـ تخصص رياضيات أعلى من مثيلتها عند طلبة الجامعة / السنة الرابعة ـ تخصص علوم . ويعود السبب في ذلك إلى الخبرات والأنشطة والمساقات التي يمر فيها أو يدرسها الطالب عند التحاقه ببرنامج تخصص الرياضيات بالجامعة ، والتي تختلف وتزيد عن تلك التي يتطلبها برنامج التخصصات العلمية الأخرى . وما يكتسبه الطالب في دراسته الجامعية عند التحاقه ببرنامج الرياضيات تعمل على زيادة مقدرته في التفكير الرياضي أكثر مما لو كان تخصصه في موضوع علمي آخر غير الرياضيات .

وتقود النتائج الفرعية الثلاث السابقة إلى استنتاج مؤداه أن القدرة على التفكير الرياضي لدى الطالب تتأثر بنوع برنامج الدراسة أو التخصص الذي يلتحق فيه الطالب في أثناء دراسته بالمرحلة الثانوية أو الجامعية . وتعمل المناهج الدراسية أو البرامج التي تتوجه نحو الرياضيات وأسلوبها في المعالجات والمناقشات بشكل واضح إلى زيادة في مقدرة الطلبة على التفكير الرياضي . وإذا لم يتعرض الطالب في أثناء دراسته لمثل هذا التوجيه لا يظهر تحسن ظاهر في التفكير الرياضي (مثلا : الأول الثانوي والثاني

الثانوي الأدبي ، سنة ثانية / علوم مع سنة رابعة / علوم) . وقد يجيز لنا ذلك التوصل إلى أن عامل الخبرة في مجال الرياضيات ودراستها هو أكثر أثرا وفاعلية في إنماء القدرة على التفكير الرياضي .

ومن الجدير بالذكر أن التعميم والاستقراء حصلت على أعلى الدرجات على الاختبار لدى جميع الفئات وكان الأداء على هذين المظهرين متقاربا . أما الأداء على الاستدلال (الاستنتاج) والبرهان الرياضي فقد كان متدنيا لجميع الفئات ودون المستوى المقبول . ويظهر ذلك أن مناهج الرياضيات مازال يعوزها الاهتمام ، والتوجه نحو تنمية قدرة الطالب ، على البرهان والمناقشات التي تبنى على المحاكمات الاستدلالية ، في حين يلاحظ أنها ـ ومع مناهج الموضوعات العلمية ـ تهتم أكثر بصياغة التعميمات والوصول إليها عن طريق الاستقراء بالملاحظة .

المراجع العربية

أبو زينة ، فريد والشيخ ، عمر : « تطور القدرة على التفكير المنطقي الفرضي عند الطلبة في مرحلتي التعليم الثانوي والجامعي » . **أبحاث اليرموك ، سلسلة العلوم الإنسانية والإجتماعية** ، المجلد الأول (٥ ـ ٣٠) : ١٩٨٤ .

« القدرة على تطبيق قواعد المنطق الفرضي عند طلبة الصف الثاني الثانوي العلمي في الأردن » **المجلة العربية للبحوث التربوية** ، المجلد الثالث (٢٩ ـ ٤٧) : ١٩٨٣ .

شطناوي ، فاضل : « تطور التفكير الرياضي عند طلبة المرحلة الثانوية في الأردن » **رسالة ماجستير غير منشورة** ، جامعة اليرموك : ١٩٨٢ .

وزارة التربية والتعليم : **منهاج الرياضيات للمرحلتين الإعدادية والثانوية** ، مديرية المناهج : ١٩٨٢ .

المراجع الأجنبية

Ausubel, D.P. "Limitations of Learning by Discovery", In Athele and Reyes (eds.) **Readings in Secondary School Mathematics.** Prindle, Weber and Schmidt, 1977.

Bernkopf, M. **Mathematics: An Appreciation,** Boston: Houghton Mifflin C., 1975.

Butler, G. and Others. **The Teaching of Secondary School Mathematics,** McGrew-Hill, 1971

Carpenter, T. etal "Results and Implications of the Second Naep Mathematics Assessments: Elementary School." **Arithmetic Teacher,** 27, (10-12, 44-47), 1980.[a]

"Students' Affective Responses to Mathematics. Secondary School Results from National Assessment". **Mathematics Teacher,** 73, (531-539), 1980).[b]

CEEB (College Entrance Examination Board). **Program for College Preporatory Mathematics,** 1959.

Chapman, L.R. **The Process of Learning Mathematics.** Oxford: Pergman Press, 1972.

CCSM. Cambridge Coference on School Mathematics **Goals For School Mathematics.** Houghton Mifflin Co., 1963.

Copeland, R.W. **How Children Learn Mathematics,** Macmillan Publishing Co., 1979, (Chap.14)

Denmark, T. and Kepner, H. "Basic Skills in Mathematics: A Survey" **Journal for Research in Math Education. 11, (104-123), 1980.**

Eisenberg T.A. and McGinty, R.L. **"On Comparing Error Patterns and the effect of Maturation in a unit on sentential logic". (225-237). Journal for Research in Mathematics Education.** 5,1974.

Ennis, R.H. "Children's Ability to handle Piaget's Propositional logic". A Critical Critiqne. **Review of Educational Research, 45** 1975, (1-41).

Jansson, L.C. "Conditional Reasoning in Adolescene. Alberta" Journal of Educational Research. 23, 1977 (118-127).

Larrabee, H. "Formal Logic: What follows from Premises". in Bowyer (ed.) **Philosophical Perspectives for Education.** Scott, Faresman and Company, 1970.

Kenneth, A.R. and Henderson K.B. "Effect of teaching Concepts of Logic on Verbalization of discover Mathematical Generalization". **Mathematics Teacher.** 60, 1967 (707-710).

Kirk, R.E. **Experimental Design: Procedures for the Behavioral Sciences,** Brooks, Cole Publicating Company, 1968.

O. Brien T.C. "Logical Thinking in Adolescents" **Educational Studies in Mathematics.** 4, 1974, (401-428).

Price, J. "Discovery: Its effect on Critical Thinking and Achievement in Mathematics **Mathematics "Teacher, 60** 1967, (874–876).

Roberge, J. "A Study of Children's Abilities to Reason with Basic Principles of deductive Reasoning." **American Educational Research Journal, 7,** 1970, (583-596).

Supper, P. and Binford, F. "Experimental Teaching of mathematical Logic in the Elementary School". **Arithmetic Teacher. 12,** 1966, (187-195).